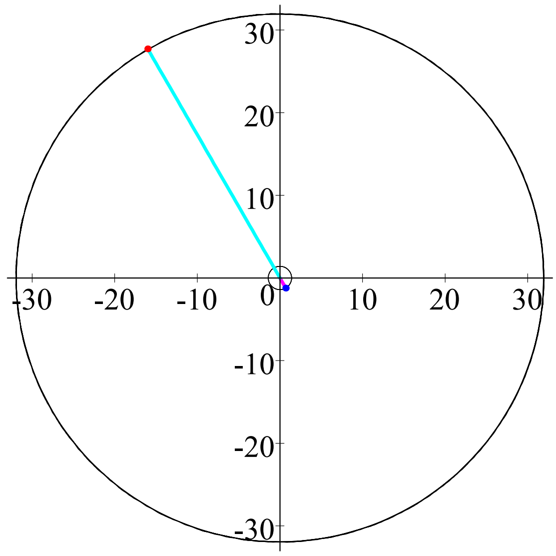
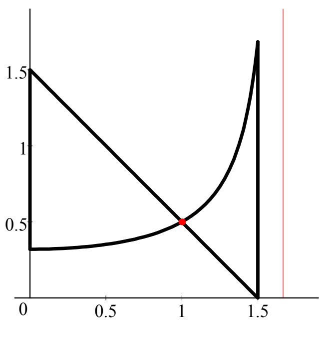
Soluzioni del compito di Istituzioni di Matematiche per Chimica (8/9/04)

1. Il numero $z = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\sqrt{\frac{3}{2}}$ ha modulo $|z| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = \sqrt{2}$; quindi, detto θ l'argomento principale di z, risulta $\cos\theta = \frac{1}{2}$ e $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$: dunque $\theta = -\frac{\pi}{3}$.
Dunque la decima potenza w di z ha modulo $|w| = |z|^{10} = 2^5 = 32$, mentre un suo argomento è $10\theta = -\frac{10}{3}\pi$.
Osserviamo che questo argomento non è principale, poiché $-\frac{10}{3}\pi$ non appartiene all'intervallo $(-\pi, \pi]$, bensì all'intervallo $(-5\pi, -3\pi]$: aggiungendo 4π si ottiene l'argomento principale di w: $\frac{2}{3}\pi$.
Dunque $w = z^{10} = 32\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) =$
$= -16 + i16\sqrt{3}$
(In figura. Punto in blu: z, punto in rosso: w)



2. La funzione $g(x) = \dfrac{8}{25 - 9x^2}$ è definita per ogni $x \neq \pm\frac{5}{3}$, è pari (e quindi simmetrica rispetto all'asse y), ha asintoto orizzontale $y = 0$ e asintoti verticali $x = \pm\frac{5}{3}$; è sempre positiva e nell'intervallo $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ in esame è sempre definita e crescente. La funzione $h(x) = \frac{3}{2} - x$ ha per grafico una retta passante per in $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ parallela alla bisettrice del II-IV quadrante.
Esse intersecano l'asse y rispettivamente in $\left(0, \frac{8}{25}\right)$ e in $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, la retta $x = \frac{3}{2}$ rispettivamente in $\left(\frac{3}{2}, \frac{32}{19}\right)$ e in $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ e si intersecano tra loro quando $\dfrac{8}{25 - 9x^2} = \dfrac{3}{2} - x$, cioè - nell'intervallo $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ - per $\begin{cases} (3 - 2x)\left(25 - 9x^2\right) = 16 \\ 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$.



È abbastanza immediato vedere che una soluzione è data da $x = 1$, che cade nell'intervallo in esame, mentre le altre sono esterne [1]. Inoltre nell'intervallo in esame il denominatore di $g(x)$ è positivo e quindi $g(x) > h(x) \iff 16 - (3 - 2x)\left(25 - 9x^2\right) > 0$, cioè per $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$: dunque nell'intervallo $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ i grafici delle due funzioni, l'asse y e la retta $x = \frac{3}{2}$ delimitano la regione limitata R indicata in figura.

L'area della regione R è data dalla somma dell'area dei due triangoloidi con vertice in $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ delimitati dalle rette $x = 0$ e $x = \frac{3}{2}$ e dai grafici di $g(x)$ sotto e di $h(x)$ sopra nell'intervallo $[1, 1]$ e di $g(x)$ sopra e di $h(x)$ sotto in $\left[1, \frac{3}{2}\right]$. Dunque

[1] Infatti, dividendo per $x - 1$ (con la regola di Ruffini) il polinomio ottenuto sviluppando $(3 - 2x)\left(25 - 9x^2\right) - 16 = 18x^3 - 27x^2 - 50x + 59$ si ottiene il polinomio $p(x) = 18x^2 - 9x - 59$ che ha uno zero negativo e quindi sicuramente esterno a $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ e uno sicuramente > 2, visto che $p(2) = -5 < 0$ (per capire l'affermazione, si pensi alla rappresentazione grafica di $p(x)$)

$$\mathcal{A}(R) = \int_0^1 \left(\frac{3}{2} - x - \frac{8}{25-9x^2}\right) dx + \int_1^{3/2} \left(\frac{8}{25-9x^2} - \frac{3}{2} + x\right) dx =^{(2)}$$

$$= \left[\frac{3}{2}x - x^2 + \frac{4}{15}\ln\frac{5-3x}{5+3x}\right]_0^1 - \left[\frac{3}{2}x - x^2 + \frac{4}{15}\ln\frac{5-3x}{5+3x}\right]_1^{3/2} =$$

$$= 2\left(\frac{3}{2} - 1 + \frac{4}{15}\ln\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{4}{15}\ln\frac{5-\frac{9}{2}}{5+\frac{9}{2}}\right) = \left(1 - \frac{8}{15}\ln 4\right) - \left(\frac{4}{15}\ln\frac{1}{19}\right) = 1 - \frac{4}{15}\ln\frac{19}{16}$$

3. La funzione $f(x) = \arctan\left(\dfrac{4\sqrt{x}}{x^2+3}\right)$

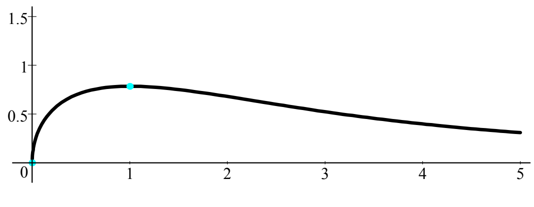
   (a) è definita su $[0, +\infty)$ (poiché in questo intervallo la radice è definita, la frazione risulta definita e l'arctangente è sempre definita). Visto che la frazione e di conseguenza l'arctangente è non negativa, $f(x) \geq 0$ in tutto l'insieme di definizione e l'unico zero è in $x = 0$.

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{4\sqrt{x}}{x^2}\right) = 0^+$: per $x \to +\infty$ c'è un asintoto orizzontale: $y = 0$

   (c) $$f'(x) = \frac{4}{1+\left(\dfrac{4\sqrt{x}}{x^2+3}\right)^2} \cdot \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(x^2+3) - 2x\cdot\sqrt{x}}{(x^2+3)^2} = 2\cdot\frac{x^2+3-4x^2}{\sqrt{x}\left((x^2+3)^2+16x\right)} > 0 \iff$$
   $x^2 < 1$ cioè, nell'insieme di definizione della funzione, per $x \in [0, 1)$: su questo intervallo la funzione cresce, mentre sull'intervallo $(1, +\infty)$ decresce. Dunque $f(x)$ ha un massimo relativo in $x = 1$. Il valore del massimo è $\arctan 1 = \pi/4$. Da notare che la funzione ha poi un minimo assoluto in $x = 0$.

   (d) Poiché $f(4) = \arctan\left(\dfrac{8}{19}\right)$ e $f'(4) = \dfrac{6(1-16)}{2(19^2+64)} = -\dfrac{6\cdot 15}{2\cdot 425} = -\dfrac{9}{85}$, l'equazione della tangente al grafico in tale punto è $y - \arctan\left(\dfrac{8}{19}\right) = -\dfrac{9}{85}(x-4)$. Invece quando $x \to 0^+$ la tangente tende a disporsi verticalmente, poiché $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{6(1-x^2)}{\sqrt{x}\left((x^2+3)^2+x\right)} = +\infty$ per cui l'equazione della tangente è $x = 0$ e

   (e) il grafico avrà un andamento come quello indicato in figura.



Il grafico fa intuire che, ci deve essere un flesso nell'intervallo $(1, +\infty)$ visto che la funzione ha un massimo in 1 e per $x \to +\infty$ tende a 0, mantenendosi sempre positiva.

---

(2) Per calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \left(\frac{8}{9x^2-25}\right) dx$ osservare che

$$\frac{8}{9x^2-25} = 8\left(\frac{A}{3x-5} + \frac{B}{3x+5}\right) \iff \begin{cases} 5A - 5B = 1 \\ 3A + 3B = 0 \end{cases} \iff A = -B = \tfrac{1}{10} \text{ e quindi}$$

$$\int \left(\frac{8}{9x^2-25}\right) dx = \tfrac{4}{5}\int\left(\frac{1}{3x-5} - \frac{1}{3x+5}\right) dx = \tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{1}{3}\left[\ln|3x-5| - \ln|3x+5|\right] + c = \frac{4}{15}\left[\ln\left|\frac{3x-5}{3x+5}\right|\right] + c$$

4. $\displaystyle\int 2x\cos(3x-1)\,dx = \boxed{\begin{array}{l}\text{per parti: fattor finito } 2x\\ \text{fattor differenziale } \cos(3x-1)\,dx\end{array}} =$

$\displaystyle = \frac{2}{3}\,x\sin(3x-1) - \frac{2}{3}\int \sin(3x-1)\,dx = \frac{2}{3}\,x\sin(3x-1) + \frac{2}{9}\,\cos(3x-1) + c$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{2+t^3}\,dt$ è integrale improprio di I specie, poiché la funzione integranda è definita e continua in $[0,+\infty)$. Osserviamo che la funzione integranda è non negativa e per $t\to+\infty$ è asintotica a $\displaystyle\frac{\ln\left(\sqrt{t}\right)}{t^3} = \frac{\ln t}{2t^3} = \frac{\ln t}{2t}\cdot\frac{1}{t^2}$.

Inoltre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{2+t^3}dt = \int_0^{1} \frac{\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{2+t^3}dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{2+t^3}dt$: il primo è un integrale definito e quindi non pone problemi, il secondo è ancora un integrale improprio, che si può dimostrare essere convergente in base al criterio del confronto.

Infatti, visto che $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{2+t^3} : \frac{1}{t^2}\right] = \lim_{t\to+\infty}\left[\left(\frac{\ln t}{2t}\cdot\frac{1}{t^2}\right)\cdot t^2\right] = 0$, (a partire da un certo t_0 in poi) risulta certamente $\displaystyle\frac{\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{2+t^3} \le \frac{1}{t^2}$. D'altra parte

$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int_1^{x}\frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1$ converge e quindi anche $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{2+t^3}\,dt$ converge.

6. Rileggendo $y' - 4y^3e^{2x} + y^3 = 0$ come $y' = \left(4e^{2x}-1\right)y^3$ si vede che è un'equazione differenziale del I ordine a variabili separabili. Entrambe le funzioni in x e in y sono continue ovunque sull'asse reale.
Una delle soluzioni che compongono l'integrale generale è $y=0$; le altre si ottengono risolvendo $\displaystyle\int\frac{dy}{y^3} = \int\left(4e^{2x}-1\right)dx$, che fornisce $\displaystyle -\frac{1}{2y^2} = 2e^{2x} - x + k$, cioè $\displaystyle y^2 = \frac{1}{2\left(x-2e^{2x}-k\right)}$ con $k\in\mathbb{R}$ che deve essere una costante negativa opportunamente grande in valore assoluto [(3)].

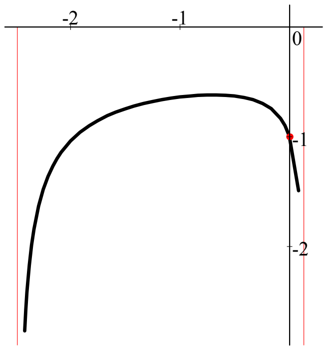
Ci sono due tipi di soluzioni, a seconda che si voglia la soluzione $y(x)$ positiva o no:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\left(x-2e^{2x}-k\right)}} \qquad \text{oppure} \qquad y = -\frac{1}{\sqrt{2\left(x-2e^{2x}-k\right)}}.$$

Perché sia soddisfatta la condizione iniziale del problema di Cauchy, $y(0)=-1$, si deve avere $\displaystyle y(0) = -\frac{1}{\sqrt{2\left(0-2e^{0}-k\right)}} = -\frac{1}{\sqrt{-2(2+k)}} = -1$, cioè $-2(2+k)=1$, $k=-\frac{5}{2}$.

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è la funzione $\displaystyle y(x) = -\frac{1}{\sqrt{2x-4e^{2x}+5}}$

3) Infatti la funzione $x-2e^{2x}$ (avendo derivata $1-4e^{2x}\ge 0$ per $2x\le -2\ln 2$) ha massimo relativo e assoluto in $x=-\ln 2$ che risulta negativo, in quanto vale $-\ln 2 - 2e^{-\ln 4} = -\ln 2 - 0.5$. Dovendo essere $x-2e^{2x}-k>0$ (in quanto y^2 è sicuramente positivo) deve almeno essere $k<-\ln 2-0.5$.



7. I vettori $\mathbf{u} = (1-k, 2, 4k)$ e $\mathbf{v} = (k+1, k-3, 1)$ sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo. Poiché
$(1-k, 2, 4k) \bullet (k+1, k-3, 1) = (1-k^2) + (2k-6) + 4k = -k^2 + 6k - 5 = 0$ per $k = 1$ e per $k = 5$, ci sono due valori di k per cui i vettori in esame sono ortogonali, $\boxed{k = 1 \text{ e } k = 5}$.