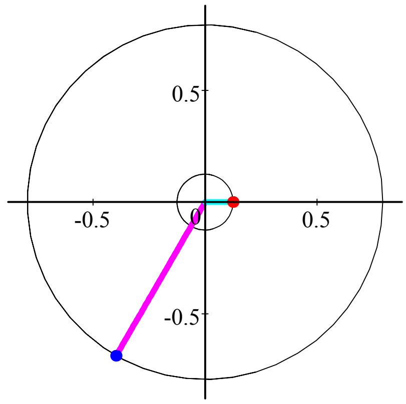
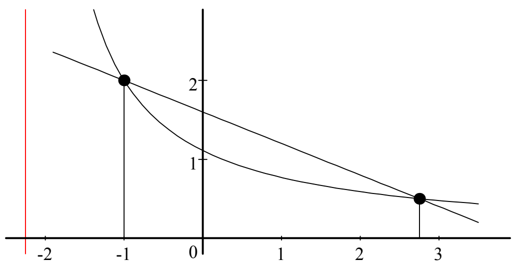
Soluzioni del compito di Istituzioni di Matematiche per Chimica (22/9/04)

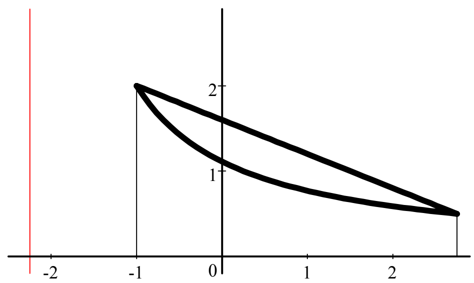
1. Il numero $z = -\frac{1}{\sqrt[3]{16}} - i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{16}}$ ha modulo $|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; quindi, detto θ l'argomento

principale di z, risulta $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ e $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$: dunque $\theta = -\frac{2\pi}{3}$. Dunque la nona potenza w di z ha modulo $|w| = |z|^9 = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^9} = \frac{1}{8}$, mentre un suo argomento è $9\theta = -6\pi$. Osserviamo che questo argomento non è principale, poiché -6π non appartiene all'intervallo $(-\pi, \pi]$, bensì all'intervallo $(-7\pi, -5\pi]$: aggiungendo 6π si ottiene l'argomento principale di w: 0. Dunque $w = z^9 = \frac{1}{8}(\cos 0 + i \sin 0) = \frac{1}{8}$ (In figura. Punto in blu: z, punto in rosso: w)



2. La funzione $g(x) = \dfrac{10}{9+4x}$ ha per grafico un'iperbole equilatera con asintoto orizzontale $y = 0$ e asintoto verticale $x = -\frac{9}{4}$; è positiva per $x > -\frac{9}{4}$ e negli intervalli in cui è definita risulta decrescente. La funzione $h(x) = \frac{2}{5}(4-x)$ ha per grafico una retta passante per $\left(0, \frac{8}{5}\right)$ con coefficiente angolare negativo $-\frac{2}{5}$: quindi è decrescente.
Esse si intersecano quando $\dfrac{10}{9+4x} = \dfrac{8-2x}{5}$, cioè se $\begin{cases} 4x^2 - 7x - 11 = 0 \\ x \neq -\frac{9}{4} \end{cases}$: vale a dire se $x = -1$ o $x = \frac{11}{4}$. I punti di intersezione sono $(-1, 2)$ e $\left(\frac{11}{4}, \frac{1}{2}\right)$ e l'unica regione limitata delimitata dai due grafici è la "lunetta" tra i due punti.





Inoltre $g(x) > h(x) \iff \dfrac{4x^2 - 7x - 11}{9+4x} < 0$, cioè per $x \in \left(-\frac{9}{4}, -1\right) \cup \left(\frac{11}{4}, +\infty\right)$ dunque la regione R è delimitata dal di sotto dal grafico di $g(x)$ e dal di sopra da quello di $h(x)$, nell'intervallo $\left[-1, \frac{11}{4}\right]$. Dunque

$$\mathcal{A}(R) = \int_{-1}^{11/4} \left(\frac{8}{5} - \frac{2}{5}x - \frac{10}{9+4x}\right) dx = \left[\frac{8}{5}x - \frac{1}{5}x^2 - \frac{5}{2}\ln|9+4x|\right]_{-1}^{11/4} =$$

$$= \left(\frac{22}{5} - \frac{121}{80} - \frac{5}{2}\ln 20\right) - \left(-\frac{8}{5} - \frac{1}{5} - \frac{5}{2}\ln 5\right) = \frac{75}{16} - \frac{5}{2}\ln 4$$

3. La funzione $f(x) = \ln\left(\dfrac{4\sqrt{x}}{x+3}\right)$

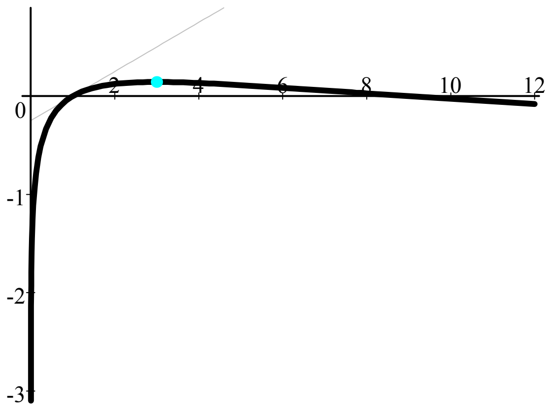
(a) è definita su $(0, +\infty)$ (poiché in questo intervallo la radice è definita e la frazione risulta definita e positiva e quindi il logaritmo è definito).
Si ha $f(x) \geq 0$ purché risulti $\dfrac{4\sqrt{x}}{x+3} \geq 1$, cioè per $\begin{cases} x - 4\sqrt{x} + 3 \leq 0 \\ x > 0 \end{cases}$, vale a dire nell'intervallo $[1, 9]$ e gli zeri sono in $x = 1$ e $x = 9$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{4\sqrt{x}}{x}\right) = -\infty$, senza asintoti; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \ln\left(\dfrac{4\sqrt{x}}{3}\right) = -\infty$, con asintoto verticale $x = 0$

(c) $f'(x) = \dfrac{4}{\dfrac{4\sqrt{x}}{x+3}} \cdot \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x+3) - \sqrt{x}}{(x+3)^2} = \dfrac{x+3-2x}{2x\,(x+3)} > 0$, nell'insieme di definizione della funzione, per $x \in (0, 3)$: su questo intervallo la funzione cresce, mentre sull'intervallo $(3, +\infty)$ decresce. Dunque $f(x)$ ha un massimo relativo in $x = 3$. Il valore del massimo è $\ln \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

(d) Poiché $f(1) = 0$ e $f'(1) = \dfrac{1}{4}$, l'equazione della tangente al grafico in tale punto è $y = \dfrac{1}{4}(x-1)$.

(e) il grafico avrà un andamento come quello indicato in figura.



Il motivo per cui ci deve essere un flesso nell'intervallo $(3, +\infty)$ non è legato al grafico, ma al fatto che per $x \to +\infty$ la funzione tende a comportarsi come $-\ln(4) - \frac{1}{2}\ln(x)$ e quindi è convessa, mentre in un intorno del punto di massimo è concava.

4. $\displaystyle\int \frac{3x}{x\sqrt{x-9}}dx = \boxed{\begin{array}{l}\text{per sostituzione: } \sqrt{x-9} = t \\ x = 9 + t^2,\ dx = 2tdt\end{array}} = \int \frac{6tdt}{(9+t^2)\,t} =$

$\displaystyle = \int \frac{6dt}{9\left(1 + \left(\frac{t}{3}\right)^2\right)} = 2\int \frac{\frac{1}{3}dt}{1 + \left(\frac{t}{3}\right)^2} = 2\arctan\left(\frac{t}{3}\right) + c = 2\arctan\left(\frac{\sqrt{x-9}}{3}\right) + c$

5. $\displaystyle\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}-} \frac{2\sqrt[4]{t^3}}{\tan(t)}\,dt$ è integrale improprio di II specie, poiché la funzione integranda è definita e continua in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ma non è limitata (in particolare $\lim\limits_{t\to0^+} \dfrac{2\sqrt[4]{t^3}}{\tan(t)} = \lim\limits_{t\to0^+} \dfrac{2t^{3/4}}{t} = +\infty$) e non è

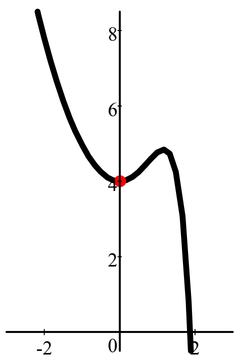
definita in $\frac{\pi}{2}$ (ma in questo caso il limite è finito: $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}-}\dfrac{2\sqrt[4]{t^3}}{\tan(t)}=0^+$ e quindi si può calcolare l'integrale generalizzato).

Per quanto appena detto, $\displaystyle\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}-}\frac{2\sqrt[4]{t^3}}{\tan(t)}\,dt=\int_{0+}^{1}\frac{2\sqrt[4]{t^3}}{\tan(t)}\,dt+\int_{1}^{\frac{\pi}{2}-}\frac{2\sqrt[4]{t^3}}{\tan(t)}\,dt$ è la somma di un integrale improprio di II specie e di un integrale generalizzato sicuramente convergente: resta quindi da discutere l'integrale improprio.

Osserviamo che la funzione integranda è non negativa e per $t\to 0^+$ è asintotica a $\dfrac{2\sqrt[4]{t^3}}{t}=\dfrac{2}{\sqrt[4]{t}}$; poiché $\displaystyle\int_{0+}^{1}\frac{2}{\sqrt[4]{t}}\,dt=\lim_{x\to 0^+}\frac{8}{3}\left(\sqrt[4]{1^3}-\sqrt[4]{x^3}\right)=\frac{8}{3}$ converge, per il criterio del confronto asintotico converge anche $\displaystyle\int_{0+}^{1}\frac{2\sqrt[4]{t^3}\sqrt{t}}{\tan(t)}\,dt=\lim_{x\to 0^+}\int_{x}^{1}\frac{2\sqrt[4]{t^3}}{\tan(t)}\,dt$ e quindi, per somma, l'integrale assegnato.

6. L'equazione differenziale $y'-\dfrac{e^x}{1+e^x}\cdot y=(1+e^x)(2x-e^x)$ è lineare completa del I ordine. Entrambe le funzioni coefficiente e termine noto sono continue ovunque sull'asse reale: ciò garantisce che l'integrale generale sarà definito ovunque.
   Risolvendo l'omogenea associata: $z'=\dfrac{e^x}{1+e^x}\cdot z$, si trova - oltre alla soluzione nulla - l'insieme delle soluzioni di $\displaystyle\int\frac{dz}{z}=\int\frac{e^x}{1+e^x}dx$, cioè $\ln|z|=\ln(1+e^x)+k$ con $k\in\mathbb{R}$: dunque le soluzioni dell'omogenea hanno la forma $z=c(1+e^x)$ con $c\in\mathbb{R}$.

   Per variazione delle costanti, si trova che l'integrale generale ha la forma $y(x)=c(x)(1+e^x)$ con
   $c'(x)\cdot(1+e^x)=(1+e^x)(2x-e^x)$, cioè $c(x)=x^2-e^x+C$ con $C\in\mathbb{R}$:
   quindi l'integrale generale è $y(x)=(x^2-e^x+C)(1+e^x)\quad$ con $C\in\mathbb{R}$.
   Perché sia soddisfatta la condizione iniziale del problema di Cauchy, $y(0)=4$, si deve avere
   $y(0)=(0^2-e^0+C)(1+e^0)=2(C-1)=4$, cioè $C=3$.
   Quindi la soluzione del problema di Cauchy è la funzione $y(x)=(x^2-e^x+3)(1+e^x)$



7. La matrice $\begin{pmatrix} 1-k & 1 & 1 & k \\ 1 & -2 & k+1 & 3 \\ 3 & k & -k & 2 \end{pmatrix}$ ha sicuramente rango non inferiore a 1 (contenendo numeri non nulli) e al più pari a 3.
Non essendo evidente un minore di ordine 2 che non si annulli per alcun valore di k, per trovare come varia il rango, conviene vedere per quali valori di k si annulla uno dei 4 minori di ordine 3 e poi sostituire questi valori nella matrice e studiare caso per caso.
Per trattare il minor numero possibile di casi, conviene cercare se esiste una sottomatrice il cui determinante sia un polinomio di grado <3. Questo succede ad es. per la matrice ottenuta cancellando la terza colonna:

$\det\begin{pmatrix} 1-k & 1 & k \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & k & 2 \end{pmatrix} = (k-1)(3k+4) - (2-k^2) + 3(3+2k) = 4k^2+7k+3.$ Questo polinomio si annulla per $k=-1$ e $k=-\frac{3}{4}$, che quindi sono candidati ad essere valori di k per cui il rango è 2 (per tutti gli altri valori di k, visto che la matrice data contiene un minore non nullo di ordine 3, il rango è 3). Sostituiamo quindi questi due valori:

I caso: $k=-\frac{3}{4}$

$\begin{pmatrix} 1+\frac{3}{4} & 1 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 1 & -2 & 1-\frac{3}{4} & 3 \\ 3 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & 1 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 1 & -2 & \frac{1}{4} & 3 \\ 3 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 2 \end{pmatrix}$ ha rango 3, poiché la matrice ottenuta cancellando la quarta colonna ha determinante

$$3\begin{vmatrix} \frac{7}{4} & 1 & 1 \\ 1 & -2 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} \frac{7}{4} & 1 & 1 \\ 1 & -2 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{7}{4} & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot\frac{7}{4}\begin{vmatrix} \frac{7}{4} & 1 \\ 1 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} \neq 0$$

II caso: $k=-1$

$\begin{pmatrix} 1+1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1-1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ha rango 2, poiché la terza riga è somma delle altre due.

Dunque $\boxed{\text{la matrice data ha rango 3 tranne che per } k=-1 \text{ valore per cui ha rango 2}}$.