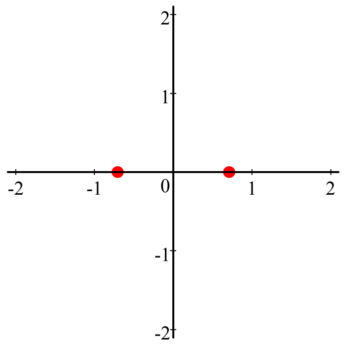
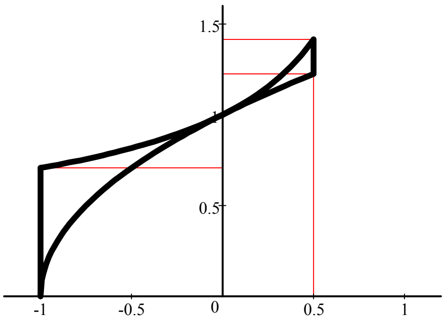
Soluzioni del compito di Istituzioni di Matematiche per Chimica (26/1/05)

1. L'equazione $z\overline{z} + z^2 = 1$ può essere riscritta come $z(\overline{z} + z) = 1$ cioè $z(2\,\mathrm{Re}\,z) = 1$. Questo implica che $z = 0$ NON è una soluzione e si può quindi riscrivere l'equazione come $z = \dfrac{1}{2\,\mathrm{Re}\,z}$ il che mette bene in evidenza che z deve essere un numero reale, cioè coincidere con $\mathrm{Re}\,z$. L'equazione $(\mathrm{Re}\,z)^2 = \dfrac{1}{2}$ ha due soluzioni reali $\mathrm{Re}\,z = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, che - per quanto detto - sono anche le soluzioni dell'equazione assegnata.



In maniera più elementare, posto $z = a + ib$ e $\overline{z} = a - ib$, l'equazione diventa
$(a + ib)(a - ib) + (a + ib)^2 = 1$, cioè
$a^2 + b^2 + a^2 - b^2 + 2iab = 1$
che equivale al sistema
$\begin{cases} 2a^2 = 1 \\ 2iab = 0 \end{cases}$, cioè $a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e $b = 0$
per cui le soluzioni sono $z = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot 0 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

2. La funzione $f(x) = \sqrt{1+x}$ è definita nell'intervallo $[-1, +\infty)$, è sempre positiva e ha per grafico una "mezza parabola" avente l'asse x come asse di simmetria (in particolare interseca l'asse x in $(-1, 0)$, l'asse y in $(0, 1)$ e tende a $+\infty$ quando x tende a $+\infty$). La funzione $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ è definita nell'intervallo $(-\infty, 1)$, è sempre positiva, interseca l'asse y in $(0, 1)$ e tende a 0 quando x tende a $-\infty$.
Risulta $f(x) \leq g(x)$ se e solo se $\begin{cases} \sqrt{1-x^2} \leq 1 \\ -1 \leq x < 1 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} -x^2 \leq 0 \\ -1 \leq x < 1 \end{cases}$ cioè sempre nell'intervallo $[-1, 1)$ (l'unico punto di intersezione tra i due grafici $(0, 1)$ è un punto di tangenza).



Dunque la regione R da prendere in esame è quella delimitata in figura dalla linea più spessa, la cui area è data da

$$\mathcal{A}(R) = \int_{-1}^{1/2} (g(x) - f(x))\,dx.$$

Poiché

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \sqrt{1+x} \right) dx = -2\sqrt{1-x} - \frac{2(1+x)^{3/2}}{3} + c, \text{ risulta}$$

$$\mathcal{A}(R) = \left[-2\sqrt{1-x} - \frac{2(1+x)^{3/2}}{3} \right]_{-1}^{1/2} = -\sqrt{2} - \sqrt{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{2} + 0 = \boxed{\sqrt{2} - \sqrt{\frac{3}{2}}}$$

3. La funzione $f(x) = x \arctan(2x)$

(a) è definita su tutto l'asse reale (poiché lo sono le due funzioni di cui è prodotto) ed è una funzione pari, in quanto prodotto di due dispari. Questo significa che il grafico è simmetrico rispetto all'asse y. Inoltre $f(x) > 0$ purché sia $x \neq 0$ (le due funzioni di cui è prodotto hanno segno concorde) e ha uno zero in $x = 0$.

(b) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \pm\frac{\pi}{2}x = \pm\infty$; verifichiamo la presenza di asintoti obliqui.

Evidentemente $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\frac{\pi}{2}$; inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) \mp \frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\arctan(2x) \mp \frac{\pi}{2}\right) = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(\arctan(2x) \mp \frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{x}} =$$

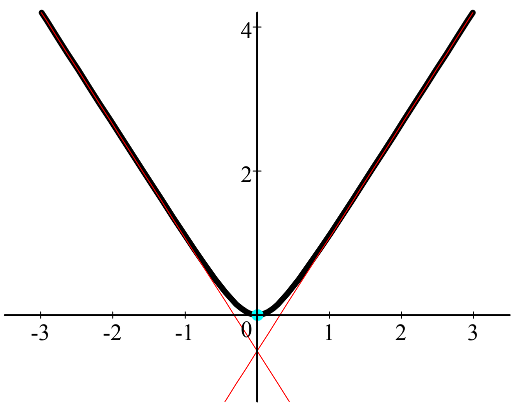
$$\boxed{\text{applicando il teorema di de l'Hospital }^{(1)}} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2}{1+4x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}.$$

Dunque la funzione per $x \to +\infty$ ha asintoto obliquo: $y = \frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}$ e per $x \to -\infty$ ha asintoto obliquo: $y = -\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}$

(c) $f'(x) = \arctan(2x) + \frac{2x}{1+4x^2} \geq 0$ se e solo se $x \geq 0$ poiché i due addendi hanno segno concorde, positivo se $x > 0$ e negativo se $x < 0$. Dunque la funzione cresce in $(0, +\infty)$, decresce in $(-\infty, 0)$ e ha un minimi relativo e assoluto in $x = 0$, il cui valore è 0.

(d) Poiché $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\arctan(1) = \frac{\pi}{8}$ e $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \arctan(1) + \frac{1}{1+1} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$, l'equazione della tangente al grafico in $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$ è $y - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi+2}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)$, cioè $y = \frac{\pi+2}{4}\cdot x - \frac{1}{4}$.

(e) Sotto è rappresentato il grafico di $f(x) = x\arctan(2x)$.



Si noti che non ci sono punti di flesso. Infatti

$$f''(x) = \frac{2}{1+4x^2} + \frac{2\left[1+4x^2-8x^2\right]}{\left(1+4x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{4}{\left(1+4x^2\right)^2} > 0 \text{ per ogni valore di } x$$

e quindi la funzione è sempre convessa.

---

(1) Un altro modo per trovare il valore di questo limite è di osservare che, per $x \to +\infty$ si ha $\arctan(2x) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e, se $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, si ha $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\alpha}$. Dunque, posto $\alpha = \arctan(2x)$, risulta

$$2x = \tan\alpha \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\arctan(2x) - \frac{\pi}{2}\right)}{2\cdot\frac{1}{2x}} = \lim_{\alpha\to\pi/2}\frac{\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{2\cdot\frac{1}{\tan\alpha}} = \lim_{\alpha\to\pi/2} -\frac{\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{2\cdot\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{1}{2}.$$

Simmetricamente si procede per $x \to -\infty$ ricordando che se $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ risulta $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\alpha}$.

4. $\displaystyle\int \frac{3(\ln x)+2}{x^2}\,dx = \boxed{\begin{array}{l}\text{per scomposizione}\\ \text{e per parti con}\\ \ln x \text{ fattor finito}\end{array}} = -\frac{2}{x}-\frac{3}{x}\ln x+3\int\frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{2}{x}-\frac{3}{x}\ln x-\frac{3}{x}+c =$

$\displaystyle = -\frac{1}{x}(5+3\ln x)+c$

5. (a) $f(t) = \dfrac{4t}{\sqrt{5t}\,(3t+2)}$ è definita purché $\begin{cases} t>0 \\ t\neq -\frac{2}{3}\end{cases}$ cioè per $t\in(0,+\infty)$. La funzione è sempre positiva.

(b) Per $t\to+\infty$ risulta $f(t) = \dfrac{4t}{\sqrt{5t}\,(3t+2)} \simeq \dfrac{4}{3\sqrt{5}\,(t^{3/2})}$ (e quindi la funzione tende a zero).

Per $t\to 0^+$, invece, $f(t)\simeq \dfrac{4}{2\sqrt{5t}}$ (e quindi la funzione diverge, e in particolare risulta illimitata sul suo insieme di definizione)

(c) Per l'osservazione appena fatta $\displaystyle\int_{0^+}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{0^+}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$ è un integrale improprio contemporaneamente di prima e di seconda specie.
La funzione $f(t)$ è positiva in $(0,+\infty)$: quindi si possono applicare i criteri di convergenza per gli integrali impropri, in particolare quelli del confronto asintotico e del confronto.
Visto che, per $t\to 0^+$, $f(t)\simeq \dfrac{2}{\sqrt{5t}}$ e l'integrale improprio <u>di seconda specie</u> $\displaystyle\int_{0^+}^{1}\frac{2}{\sqrt{5t}}dt = \frac{2}{\sqrt{5}}\int_{0^+}^{1}\frac{dt}{t^{1/2}}$ converge (poiché al denominatore della funzione integranda c'è una potenza di t con esponente <1), anche l'integrale improprio di seconda specie $\displaystyle\int_{0^+}^{1} f(t)\,dt$ converge (criterio del confronto asintotico).
Inoltre visto che, per $t\to+\infty$, risulta $f(t)\simeq \dfrac{4}{3\sqrt{5}\,(t^{3/2})}$ e l'integrale improprio <u>di prima specie</u> $\displaystyle\frac{4}{3\sqrt{5}}\int_{1}^{+\infty}\frac{dt}{t^{3/2}}$ converge (poiché al denominatore della funzione integranda c'è una potenza di t con esponente >1) anche $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{4t\,dt}{\sqrt{5t}\,(3t+2)}$ converge (criterio del confronto asintotico).

Dunque $\boxed{\displaystyle\int_{0^+}^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge}}$, poiché entrambi gli integrali di cui è somma convergono.

6. (a) $y'+\dfrac{1}{x^2}\cdot y = -\dfrac{3}{x^3}$ è un'equazione differenziale del I ordine lineare completa: coefficiente del termine in y e termine noto sono definiti e continui sui due intervalli $(-\infty,0)$ e $(0,+\infty)$.
L'equazione omogenea associata $z' = -\dfrac{1}{x^2}\cdot z$, oltre alla soluzione $z=0$, ha le soluzioni $\displaystyle\int\frac{dz}{z} = \int -\frac{1}{x^2}dx$ cioè $\ln|z| = \dfrac{1}{x}+k$ vale a dire, tenuto conto anche della soluzione nulla, $z = c\cdot e^{1/x}$ (con $c\in\mathbb{R}$). Applicando il metodo di variazione della costante, si trova che una soluzione particolare deve avere la forma $\overline{y}(x) = c(x)\cdot e^{1/x}$, ove $c(x)$ deve essere tale che $\left(c'(x)\cdot e^{1/x} - c(x)\cdot\dfrac{1}{x^2}\cdot e^{1/x}\right) + \dfrac{1}{x^2}\cdot c(x)\cdot e^{1/x} = -\dfrac{3}{x^3}$, cioè

$$c(x)=\int -\frac{3}{x^3}\cdot e^{-1/x}dx=\boxed{\begin{array}{l}\text{sostituendo}\\ t=-1/x\\ dt=dx/x^2\end{array}}=3\int te^t dt=3\left(te^t-\int e^t dt\right)=$$

$$=3\left(te^t-e^t\right)+C=-3\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}+C$$

e quindi una soluzione particolare è $\overline{y}(x)=-3\left(1+\frac{1}{x}\right)$ e l'integrale generale dell'equazione differenziale è $\boxed{y(x)=c\cdot e^{1/x}-3\left(1+\frac{1}{x}\right)}$: le funzioni di questo tipo sono soluzioni (cioè sono derivabili e soddisfano l'equazione differenziale) in ciascuno dei due intervalli $(-\infty,0)$ e $(0,+\infty)$ presi separatamente.

(b) Perché la funzione $y(x)=c\cdot e^{1/x}-3\left(1+\frac{1}{x}\right)$ soddisfi la condizione iniziale $y(1)=0$, basta che sia $0=ce-3\cdot 2$ cioè $c=6e^{-1}$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è la funzione $\boxed{y(x)=6e^{(1/x)-1}-3\left(1+\frac{1}{x}\right)}$. Il suo dominio deve essere ristretto all'intervallo $(0,+\infty)$: infatti in ogni punto di tale intervallo la funzione $y(x)$ risulta derivabile e in tale intervallo è contenuto il punto iniziale $x=1$ dato dal problema.

7. I tre vettori di $\mathbb{R}^3$ proposti: $(2,-1,k+1)$, $(-3,4,2)$, $(3k+1,-14,4)$ sono dipendenti se e solo se il determinante della matrice ottenuta incolonnandoli $\begin{pmatrix}2&-1&k+1\\-3&4&2\\3k+1&-14&4\end{pmatrix}$ è nullo.

Ora $\begin{vmatrix}2&-1&k+1\\-3&4&2\\3k+1&-14&4\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-1&k+1\\-14&4\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}2&k+1\\3k+1&4\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2&-1\\3k+1&-14\end{vmatrix}=$

$=2\left[-3\left(-7k-5\right)+2\left(7-4k-3k^2\right)-\left(-27+3k\right)\right]=-4\left(3k^2-5k-28\right)=0$

se e solo se $k=4$ e $k=-\frac{7}{3}$: questi sono dunque i valori per cui i tre vettori sono dipendenti.