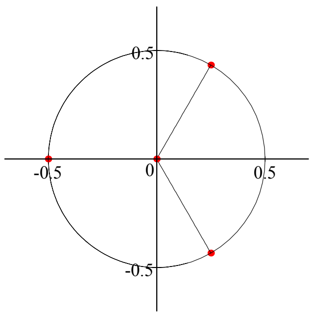
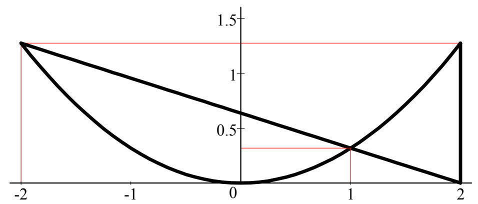
Soluzioni del compito di Istituzioni di Matematiche per Chimica (23/2/05)

1. L'equazione $8z^4 + z = 0$ si può riscrivere come $(8z^3 + 1)\, z = 0$ e quindi ha tra le sue soluzioni $\boxed{z = 0}$. Risolvere la restante equazione $8z^3 + 1 = 0$ significa calcolare le radici terze del numero complesso $-\frac{1}{8}$. Tale numero ha modulo $\frac{1}{8}$ e argomento principale $\theta = \pi$ come si vede osservando che ha parte reale negativa e parte immaginaria nulla. Dunque le sue radici terze hanno modulo $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$ e argomenti $\theta_k = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$ con $k = 0, 1, 2$ (o equivalentemente $k = 0, 1, -1$) cioè le radici hanno la forma $z_k = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right)$.
Dunque le restanti soluzioni dell'equazione sono



$$z_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i}$$
$$z_1 = \frac{1}{2}(\cos(\pi) + i \sin(\pi)) = \boxed{-\frac{1}{2}}$$
e, visto che la terza radice è simmetrica della prima rispetto all'asse x, $z_2 = \boxed{\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i}$

2. La funzione $f(x) = \frac{x^2}{\pi}$ nell'intervallo $[-2, 2]$ è sempre non negativa e ha per grafico un arco di parabola simmetrico rispetto all'asse y, che interseca le due rette $x = 2$ e $x = -2$ rispettivamente nei punti di coordinate $\left(2, \frac{4}{\pi}\right)$ e $\left(-2, \frac{4}{\pi}\right)$.
La funzione $g(x) = \frac{2 - x}{\pi}$ ha per grafico una retta con coefficiente angolare negativo che è sempre non negativa nell'intervallo $[-2, 2]$, poiché $g(x) \geq 0 \iff x \leq 2$.



Nell'intervallo in esame risulta $f(x) \geq g(x)$ se e solo se $\begin{cases} \frac{x^2}{\pi} \geq \frac{2-x}{\pi} \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$ ossia per $1 \leq x \leq 2$: ne consegue che i due grafici hanno in comune i due punti $\left(-2, \frac{4}{\pi}\right)$ e $\left(1, \frac{1}{\pi}\right)$ e che la regione R da prendere in esame è quella delimitata in figura dalla linea più spessa, la cui area è data da

$\mathcal{A}(R) = \int_{-2}^{1} (g(x) - f(x))\, dx + \int_{1}^{2} (f(x) - g(x))\, dx$. Poiché $\int (f(x) - g(x))\, dx = \int \frac{x^2 + x - 2}{\pi} dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right) + c$, risulta $\mathcal{A}(R) = \frac{1}{\pi}\left(-\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-2}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{1}^{2}\right) =$
$= \frac{1}{\pi}\left(2\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 + \frac{8}{3} + \frac{4}{2} - 4\right) = \boxed{\frac{19}{3\pi}}$

3. La funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+8x+15}}{2x+9}$

(a) è definita in $(-\infty,-5] \cup [-3,+\infty)$ poiché la radice è definita se e solo se $x^2+8x+15 \geq 0$ cioè se $x \leq -5$ oppure $x \geq -3$ e la frazione è definita se e solo se il denominatore è non nullo, cioè $x \neq -\dfrac{9}{2}$: poiché $-\dfrac{9}{2} \in (-5,-3)$ la frazione risulta sempre definita là dove è definita la radice. Inoltre, essendo la radice sempre non negativa quando è definita, $f(x) > 0$ purché la funzione sia definita e il denominatore sia positivo, cioè per $x \in (-3,+\infty)$ mentre $f(x) < 0$ per $x \in (-\infty,-5)$; invece gli zeri della funzione si hanno in corrisposndenza agli zeri della radice: $x=-5$ e $x=-3$.

(b) Visto che la funzione è sempre continua nel suo insieme di definizione, non è necessario calcolare i limiti negli estremi finiti di tale insieme: essi coincideranno con il valore della funzione, che è 0.
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2}}{2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{|x|}{2x} = \pm\dfrac{1}{2}$; quindi $f(x)$ presenta <u>due asintoti orizzontali</u>: $y=-\dfrac{1}{2}$ per x che tende a $-\infty$ e $y=\dfrac{1}{2}$ per x che tende a $+\infty$.
Il grafico <u>interseca l'asintoto</u> $y=-\dfrac{1}{2}$ se e solo se $\dfrac{\sqrt{x^2+8x+15}}{2x+9} = -\dfrac{1}{2}$,
cioè $2\sqrt{x^2+8x+15} = -(2x+9)$ che equivale al sistema

$$\begin{cases} 4\left(x^2+8x+15\right) = (2x+9)^2 \\ x^2+8x+15 \geq 0 \\ -2x-9 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x+21=0 \\ x \leq -5 \text{ oppure } x \geq -3 \\ x \leq -\dfrac{9}{2} \end{cases} \iff x = -\frac{21}{4}$$

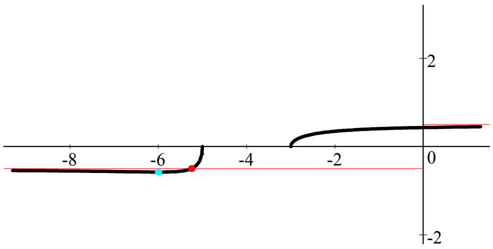
Il grafico <u>non interseca invece l'asintoto</u> $y=\dfrac{1}{2}$, poiché l'equazione $\dfrac{\sqrt{x^2+8x+15}}{2x+9} = \dfrac{1}{2}$ porta al sistema $\begin{cases} 4\left(x^2+8x+15\right) = (2x+9)^2 \\ x^2+8x+15 \geq 0 \\ 2x+9 \geq 0 \end{cases}$

che ha due relazioni uguali al precedente, ma la terza in contraddizione con esse.

(c) $$f'(x) = \frac{\dfrac{(2x+8)(2x+9)}{2\sqrt{x^2+8x+15}} - 2\sqrt{x^2+8x+15}}{(2x+9)^2} = \frac{(x+4)(2x+9) - 2\left(x^2+8x+15\right)}{(2x+9)^2\sqrt{x^2+8x+15}} =$$
$= \dfrac{x+6}{(2x+9)^2\sqrt{x^2+8x+15}} \geq 0$ se e solo se la derivata è definita e il numeratore è positivo cioè per $x \in (-6,-5)$ e $x \in (-3,+\infty)$. Dunque la funzione cresce in $(-6,-5)$ e in $(-3,+\infty)$, decresce in $(-\infty,-6)$ e ha un punto di <u>minimo relativo in</u> $x=-6$. Il valore del minimo è $f(-6) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(d) Negli zeri $x=-5$ e in $x=-3$ la derivata prima non è definita; si ha però $\lim_{x\to-5^+} f'(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-3^-} f'(x) = +\infty$: quindi l'equazione della retta tangente al grafico in $(-5,0)$ è $x=-5$ e quella della retta tangente al grafico in $(-3,0)$ è $x=-3$.

(e) Il grafico di $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+8x+15}}{2x+9}$, di seguito rappresentato, interseca l'asse y in $\left(0, \dfrac{\sqrt{15}}{9}\right)$.



Si noti che sicuramente <u>esiste</u> un punto di <u>flesso</u> nell'intervallo $(-\infty, -6)$. Infatti la funzione presenta un minimo relativo in $x = -6$ e quindi in un opportuno intorno di tale punto è convessa, mentre per $x \to -\infty$ deve essere concava poiché in caso contrario il grafico dovrebbe avere una seconda intersezione con l'asintoto $x = -\dfrac{1}{2}$.

4. $\displaystyle\int 2x\left(\cos(x^2) - \sin(2x)\right)\, dx = \boxed{\text{per scomposizione}} = \int 2x\cos(x^2)\, dx + \int -2x\sin(2x)\, dx =$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{il primo: per sostituzione}\\ \text{il secondo: per parti con}\\ x \text{ fattor finito}\end{array}} = \sin(x^2) + \left(x\cos(2x) - \int \cos(2x)\, dx\right) =$$

$$= \boxed{\sin(x^2) + x\cos(2x) - \frac{1}{2}\sin(2x) + c}$$

5. La funzione $f(t) = \dfrac{\ln t}{1-t}$

(a) è definita per ogni valore reale di $t > 0$ e diverso da 1, quindi in $(0,1) \cup (1, +\infty)$ ed è sempre negativa. Inoltre

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{1} = -\infty \text{ e } \lim_{t\to 1^-} f(t) = \lim_{t\to 1^-} \frac{\ln t}{1-t} = \boxed{\begin{array}{l}\text{posto}\\ t-1=z\end{array}} = \lim_{z\to 0^-} \frac{\ln(1+z)}{-z} = -1.$$

(b) Ne consegue che $\int_{0^+}^{1} f(t)\, dt$ è un integrale generalizzato (in entrambi gli estremi la funzione non è definita) ma, mentre per calcolare l'integrale in un intervallo $[a, 1]$ con $a > 0$ basta definire bene la funzione in $t = 1$, in modo che risulti continua da sinistra ($f(1) = -1$) in ogni intervallo $(0, a)$ la funzione risulta illimitata: dunque l'integrale proposto è improprio di seconda specie. Per stabilire se converge, osserviamo che per $t \to 0^+$ il rapporto $\dfrac{f(t)}{-t^{-1/2}} = \dfrac{t^{1/2}\ln t}{t-1} \simeq -t^{1/2}\ln t = t^{1/2}\ln\dfrac{1}{t}$ tende a zero: infatti, posto $\dfrac{1}{t} = z$, risulta $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{-t^{-1/2}} = \lim_{t\to 0^+} t^{1/2}\ln\frac{1}{t} = \lim_{z\to+\infty} \frac{1}{z^{1/2}}\ln z = 0$, per il confronto di infiniti. Poiché $f(t)$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a $\dfrac{-1}{t^{1/2}}$ e $\displaystyle\int_{0^+}^{1} \frac{-1}{t^{1/2}} dt$ è un integrale improprio di seconda specie convergente, per il criterio del confronto asintotico generalizzato anche $\boxed{\text{l'integrale improprio di seconda specie } \int_{0^+}^{1} f(t)\, dt \text{ converge}}$.

6. $y' = (y^2 - y)\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ è un'equazione differenziale del I ordine a variabili separabili (NON lineare): la funzione in y (cioè il polinomio $y^2 - y$) è continua su tutto l'asse reale mentre quella in x lo è in ciascuno dei due intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$. Quindi il problema di Cauchy dato dalla condizione iniziale $y(2) = b$ è risolubile per ogni $b \in \mathbb{R}$ e la soluzione ha per dominio l'intervallo $(0, +\infty)$: infatti in tale intervallo è contenuto il punto iniziale $x = 2$ del problema di Cauchy.
Tra le soluzioni dell'equazione differenziale ci sono le due soluzioni dell'equazione $y^2 - y = 0$: $\boxed{y(x) = 0 \text{ e } y(x) = 1}$; in particolare la prima soddisfa il problema di Cauchy quando $b = 0$.
Per trovare le restanti soluzioni ricorriamo alla separazione delle variabili e alla loro integrazione membro a membro: $\int \frac{dy}{y^2 - y} = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$
Scomponendo la frazione si vede che il primo integrale vale
$\int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right) dy = \ln|y - 1| - \ln|y| + k_1 = \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| + k_1$
e quindi le soluzioni hanno la forma
$\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = x + \ln|x| + k$ vale a dire, $\left|\frac{y-1}{y}\right| = e^{k+x+\ln|x|} = e^k e^x |x|$ cioè $\frac{y-1}{y} = \left(\pm e^k\right) x e^x$;
tenuto conto anche della soluzione $y(x) = 1$, possiamo riscrivere queste soluzioni nella forma $\frac{y-1}{y} = cxe^x$ (con $c \in \mathbb{R}$).
Ricavando y, si trova che $\boxed{\text{l'integrale generale è dato da } y(x) = \frac{1}{1 - cxe^x}}$ e se la condizione iniziale è $y(2) = -1$ si deve avere $\frac{-1-1}{-1} = 2e^2c$ cioè $c = e^{-2}$. Dunque la funzione soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale $y(2) = -1$ è: $\boxed{y(x) = \frac{1}{1 - xe^{x-2}}}$.

7. Un vettore (x, y, z, t) è contemporaneamente ortogonale ai tre vettori $\mathbf{u} = (1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, -1, 0)$ e $\mathbf{w} = (1, 0, -1, 2)$ se il suo prodotto scalare con ciascuno di questi vettori è nullo, cioè se le sue componenti soddisfano il sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x + t = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x - z + 2t = 0 \end{cases}$

cioè, sottraendo la I equazione dalla III e risolvendo: $\begin{cases} x = -t \\ -t + y - t = 0 \\ z = t \end{cases}$

Ciò significa che sono soluzione tutti i vettori della forma $(-t, 2t, t, t)$ con t numero reale non nullo e in particolare il vettore $\boxed{(-1, 2, 1, 1)}$.