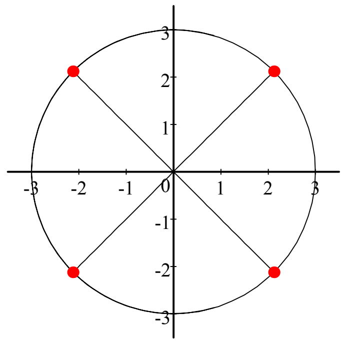
Soluzioni del compito di Istituzioni di Matematiche per Chimica (9/2/06)

1. $w = -81$ ha modulo 81 e argomento principale π. Quindi le sue radici quarte stanno su una circonferenza centrata nell'origine del piano di Argand Gauss e di raggio $\sqrt[4]{81} = 3$ e sono ai vertici di un quadrato che ha per diagonali le bisettrici del I-III e II-IV quadrante, cioè hanno argomento $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, con $k = 0, 1, 2, 3$.



Le radici quarte sono quindi rappresentate dai punti rossi in figura e (lette in verso antiorario a partire da quella di argomento $\frac{\pi}{4}$) hanno rappresentazione algebrica

$z_0 = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}i$
$z_1 = -\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}i$
$z_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i$
$z_3 = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i$

2. La funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - x}{x - 2}}$

   (a) è definita in $[0, 1] \cup (2, +\infty)$ poiché il radicando deve essere non negativo e il denominatore deve essere diverso da 0. Essa risulta non negativa dove è definita. In $x = 0$ e in $x = 1$ la funzione ha due zeri.

   (b) Gli estremi dell'insieme di definizione in cui la funzione non è definita sono 2 e $+\infty$: dunque si devono studiare i limiti per x che tende a 2 da destra e per x che tende a $+\infty$.
   $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \sqrt{\dfrac{2}{x-2}} = +\infty$: dunque $\boxed{\text{la funzione per } x \to 2^+ \text{ ha asintoto verticale:}}$ di equazione $x = 2$.

   Ancora: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ ma la funzione, per $x \to +\infty$, non ha asintoti obliqui, essendo asintotica a $\sqrt{x}$.

   (c) $f'(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-x}} \cdot \dfrac{(2x-1)(x-2) - (x^2 - x)}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x + 2}{|x-2|\sqrt{(x-2)(x^2-x)}} \geq 0,$

   se e solo se $\begin{cases} x \in \left(-\infty, 2-\sqrt{2}\right] \cup \left[2+\sqrt{2}, +\infty\right) \\ x \in [0,1] \cup (2, +\infty) \end{cases}$ cioè in $\left[0, 2-\sqrt{2}\right] \cup \left[2+\sqrt{2}, +\infty\right)$

   Dunque la funzione cresce in $\left[0, 2-\sqrt{2}\right)$ e in $\left(2+\sqrt{2}, +\infty\right)$ e decresce in $\left(2-\sqrt{2}, 1\right]$ e in $\left(2, 2+\sqrt{2}\right)$ e ha

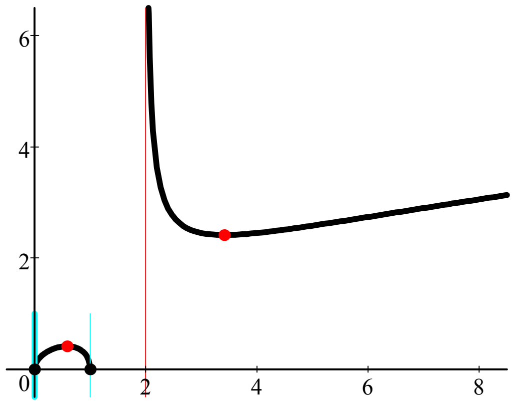
   un massimo relativo in $x = 2-\sqrt{2}$, il cui valore è $f(x) = \sqrt{\dfrac{4-3\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}} = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$,

   nonché

   un minimo relativo in $x = 2+\sqrt{2}$, il cui valore è $f(x) = \sqrt{\dfrac{4+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1$,

(d) Negli zeri della funzione la derivata non è definita (il denominatore si annulla in $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$: i primi due valori sono gli zeri di $f(x)$ funzione, l'ultimo valore invece non appartiene all'insieme di definizione di $f(x)$): peraltro $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{2x}} = +\infty$ e $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{-1}{\sqrt{x-1}} = -\infty$: quindi le due tangenti negli zeri hanno equazione rispettivamente $x = 0$ e $x = 1$.

(e) Sotto è rappresentato il grafico di $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - x}{x-2}}$.



Sicuramente la funzione presenta un flesso nell'intervallo $\left(2+\sqrt{2}, +\infty\right)$: infatti in un intorno del punto di minimo relativo la funzione è convessa, mentre in un intervallo $[a, +\infty)$ (con a abbastanza grande) la funzione è concava essendo asintotica, per $x \to +\infty$, a $\sqrt{x}$.

3. Per calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{-\pi/6} 3(\cos x)^3\,dx$, cominciamo col calcolare:

$$\int 3(\cos x)^3\,dx = \int 3\cos x\left[1-(\sin x)^2\right]dx = \boxed{\text{per scomposizione:}} =$$
$$= \int 3\cos x dx - \int 3\cos x(\sin x)^2\,dx = 3\sin x - (\sin x)^3 + c$$

Dunque $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{-\pi/6} 3(\cos x)^3\,dx = \left[3\sin x - (\sin x)^3\right]_{-\pi/2}^{-\pi/6} =$

$$= 3\left[\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right] - \left[\sin^3\left(\frac{-\pi}{6}\right) - \sin^3\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right] = 3\left[1-\frac{1}{2}\right] - \left[1-\frac{1}{8}\right] = \boxed{\frac{5}{8}}$$

Questo integrale rappresenta l'area della regione limitata di piano compresa tra l'asse x, il grafico della funzione integranda e le due rette di equazione $x = \dfrac{-\pi}{2}$ e $x = \dfrac{-\pi}{6}$, poiché la funzione è positiva in tutto l'intervallo $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{-\pi}{6}\right]$.

4. La funzione $f(t) = \dfrac{1-e^{-t}}{t^{3/2}(2t+1)}$

(a) è definita purché $\begin{cases} t \geq 0 \text{ (insieme di definizione della potenza)} \\ t \neq 0, -\frac{1}{2} \text{ (insieme di definizione del quoziente)} \end{cases}$ cioè per $t \in (0, +\infty)$.

In $(0, +\infty)$ la funzione è continua e sempre positiva.

(b) Per $t \to +\infty$ risulta $f(t) \simeq \dfrac{1}{2t^{5/2}}$ poiché $e^{-t} \to 0^+$ (e quindi la funzione tende a zero).

Per $t \to 0^+$, invece, $f(t) \simeq \dfrac{t}{t^{3/2}} = \dfrac{1}{t^{1/2}}$ poiché $1 - e^{-t} \simeq -(-t)$ (e quindi la funzione diverge, e in particolare risulta illimitata sul suo insieme di definizione)

(c) Per l'osservazione appena fatta $\int\limits_{0^+}^{+\infty} f(t)\,dt = \int\limits_{0^+}^{1} f(t)\,dt + \int\limits_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$ è un integrale improprio contemporaneamente di prima e di seconda specie.

La funzione $f(t)$ è positiva in $(0, +\infty)$: quindi si può applicare un criterio di convergenza per gli integrali impropri, in particolare quello del confronto asintotico.

Visto che, per $t \to 0^+$, $f(t) \simeq \dfrac{1}{t^{1/2}}$ e l'integrale improprio $\underline{\text{di seconda specie}}$ $\int\limits_{0^+}^{1} \dfrac{1}{t^{1/2}}dt$ converge (poiché al denominatore della funzione integranda c'è una potenza di t con esponente < 1), anche l'integrale improprio di seconda specie $\int\limits_{0^+}^{1} f(t)\,dt$ converge (criterio del confronto asintotico).

Converge per il criterio del confronto asintotico anche $\int\limits_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$ poiché, per $t \to +\infty$, risulta $f(t) \simeq \dfrac{1}{2t^{5/2}}$ e l'integrale improprio $\underline{\text{di prima specie}}$ $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{1}{2t^{5/2}}dt$ è convergente in quanto al denominatore della funzione integranda c'è una potenza di t con esponente > 1.

Dunque $\boxed{\int\limits_{0^+}^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge}}$, poiché entrambi gli integrali di cui è somma convergono.

5. La funzione di due variabili $f(x,y) = x^3 + 2x^2y - 3xy$ ha derivate parziali $f_x(x,y) = 3x^2 + 4xy - 3y$ e $f_y(x,y) = 2x^2 - 3x = x(2x-3)$. I suoi punti critici sono quelli le cui coordinate annullano il gradiente $\mathbf{grad}(f(x,y)) = (f_x(x,y), f_y(x,y))$, cioè le soluzioni del sistema: $\begin{cases} 3x^2 + 4xy - 3y = 0 \\ x(2x-3) = 0 \end{cases}$.

   La seconda equazione ha soluzioni $x = 0$ e $x = \frac{3}{2}$, che sostituite nella prima portano ai due sistemi
   $$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ \frac{27}{4} + y(6-3) = 0 \end{cases}$$
   che hanno soluzioni: $\boxed{(0,0) \text{ e } \left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)\text{: questi sono i punti critici}}$.

   Tenuto conto che l'hessiano è $H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x+4y & 4x-3 \\ 4x-3 & 0 \end{vmatrix} = -(4x-3)^2$, si vede che entrambi i punti critici sono punti di sella (infatti l'hessiano non si annulla in nessuno dei due e quindi è negativo in entrambi i casi).

6. $y' = (xe^{2x})\left(\dfrac{y^2}{4} - 1\right)$ è un'equazione differenziale del I ordine a variabili separabili: tanto la funzione in x che quella in y sono definite e continue su tutto l'asse reale e quindi ci aspettiamo di trovare soluzione al problema di Cauchy in ogni punto del piano.

   Sono sicuramente soluzioni dell'equazione differenziale le due funzioni $y(x) = 2$ e $y(x) = -2$, che annullano il fattore in y: nessuna delle due è soluzione del nostro problema di Cauchy

$(y(0) = 1)$.

Possiamo quindi dividere entrambi i membri dell'equazione per $\left(\frac{y^2}{4} - 1\right)$ e cercare l'integrale generale risolvendo l'equazione $\int \frac{4dy}{y^2-4} = \int (xe^{2x})\, dx$.

Osservando che $\frac{4}{y^2-4} = \frac{A}{y-2} + \frac{B}{y+2} \iff A = 1 = -B$, si trova $\int \frac{4dy}{y^2-4} = \ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| + C_1$

Inoltre $\int (xe^{2x})\, dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C_1$ (integrazione per parti con fattor finito x). Dunque $\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c$ (con $c \in \mathbb{R}$), cioè $\frac{y-2}{y+2} = \pm e^c \cdot e^{\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}}$ che riscriveremo

$$(*) \qquad \frac{y(x)-2}{y(x)+2} = k \cdot e^{\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}} \text{ (con } k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}).$$

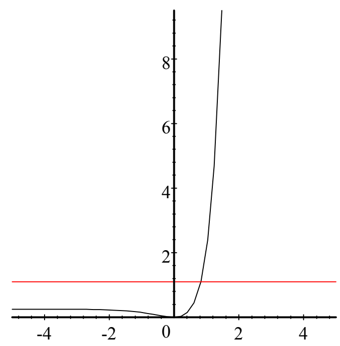
Per avere l'integrale generale basta ricavare $y(x)$: per agevolare il conto denotiamo con $F(x)$ la funzione $k \cdot e^{\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}}$.

Si trova allora $y - 2 = (y+2)F(x)$, vale a dire $y(x) = \frac{2(F(x)+1)}{1-F(x)}$. Notiamo che questa funzione è definita solo se $F(x) \neq 1$

Per la soluzione del problema di Cauchy si deve avere $y(0) = 1$; sostituendo questi valori in $(*)$ si trova: $\frac{1-2}{1+2} = k \cdot e^{-\frac{1}{4}}$. Dunque si ha soluzione al problema di Cauchy per $k = \frac{1}{3}e^{\frac{1}{4}}$.

Essa ha la forma $\boxed{y(x) = \frac{2\left(e^{\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{4}} + 3\right)}{3 - e^{\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{4}}}}$.

Il suo dominio è costituito dall'intervallo $(-\infty, \alpha)$ ove α è la soluzione (positiva come mostrato dal grafico a fianco) dell'equazione $\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{4} = \ln 3$ poiché in tale intervallo la funzione è definita continua e derivabile.



7. La matrice $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 0 & \boxed{-2} \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 10 & k & \boxed{-1} & 5 \\ 0 & 1 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$ è quadrata: quindi per trovarne il rango conviene cominciare ad esaminare il suo determinante che si può ottenere andando a sviluppare successivamente secondo la seconda riga e la terza colonna. Esso è pari a $2(-1)6(k-1) = 12(1-k)$ e quindi si annulla solo per $k = 1$. Dunque se $k \neq 1$ il rango della matrice è 4 (essendo il determinante non nullo). Invece se $k = 1$ il rango è 3, in quanto la matrice contiene una sottomatrice quadrata di ordine 3 (quella formata con le prime 3 righe e le ultime 3 colonne) che ha determinante $2 \neq 0$.