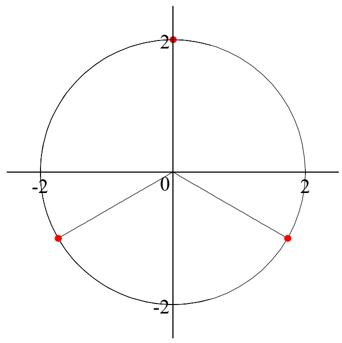
Soluzioni del compito di Istituzioni di Matematiche per Chimica (23/2/06)

1. $w = -8i$ ha modulo 8 e argomento principale $-\frac{\pi}{2}$. Quindi le sue radici terze stanno su una circonferenza centrata nell'origine del piano di Argand Gauss e di raggio $\sqrt[3]{8} = 2$ e sono ai vertici del triangolo equilatero corrispondente agli argomenti $-\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$, con $k = -1, 0, 1$.



Le radici terze sono quindi rappresentate dai punti rossi in figura e (lette in verso antiorario a partire da quella di argomento $-\frac{\pi}{6}$) hanno rappresentazione algebrica
$z_0 = \sqrt{3} - i$
$z_1 = 2i$
$z_{-1} = -\sqrt{3} - i$

2. La funzione $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 2x}$

   (a) è definita in $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ poiché il radicando deve essere non negativo. Nell'intervallo $(-\infty, 0]$ risulta $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 2x} \leq 0$ poiché entrambi gli addendi sono non positivi; nell'intervallo $[2, +\infty)$ si ha $f(x) \geq 0 \iff x^2 \geq x^2 - 2x$ e quindi la funzione è sempre positiva. La funzione si annulla se e solo se $x = 0$.

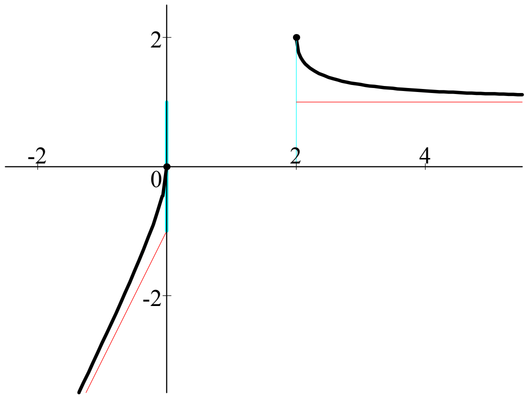
   (b) Gli estremi dell'insieme di definizione in cui la funzione non è definita sono $-\infty$ e $+\infty$: dunque si devono studiare i limiti per x che tende a $\pm\infty$.
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x^2 + 2x}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x^2 + 2x}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x + |x|} = 1$$
   poiché, per $x \to +\infty$, x è positivo e quindi $|x| = x$. $\boxed{\text{Asintoto orizzontale: } y = 1}$.

   Ancora: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x - \sqrt{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x - |x| = \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty$ poiché, per $x \to +\infty$, x è negativo e quindi $|x| = -x$. È possibile che esista un asintoto obliquo con coefficiente angolare $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x} = 2$ e ordinata all'origine
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to-\infty} -x - \sqrt{x^2 - 2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - x^2 + 2x}{-x + \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-x + |x|} = -1:$$
   dunque la funzione per $x \to -\infty$ $\boxed{\text{ha asintoto obliquo di equazione: } y = 2x - 1}$.

   (c) $f'(x) = 1 - \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}} \geq 0$, se e solo se $\begin{cases} x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \\ \sqrt{x^2 - 2x} \geq x - 1 \end{cases}$ cioè: sicuramente in $(-\infty, 0)$ ove il secondo membro della disuguaglianza è negativo mentre il primo è non negativo; invece in $(2, +\infty)$ la disuguaglianza, equivalendo a $x^2 - 2x \geq (x - 1)^2$, non è mai realizzata. Ne segue che la funzione <u>cresce in</u> $(-\infty, 0)$ e decresce in $(2, +\infty)$ senza punti di massimo o minimo relativi (non vanno considerati tali $x = 0$ ed $x = 2$ in quanto *non* sono *interni* all'insieme di definizione.

(d) Negli estremi finiti dell'insieme di definizione della funzione la derivata non è definita (il denominatore si annulla in $x = 0$, $x = 2$ punti in cui invece la funzione è definita e vale rispettivamente 0 e 2): peraltro $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 - \dfrac{-1}{\sqrt{-2x}} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} = -\infty$: quindi le due tangenti negli estremi finiti dell'insieme di definizione hanno equazione rispettivamente $x = 0$ e $x = 2$.

(e) Sotto è rappresentato il grafico di $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 2x}$.



3. Per calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_0^{3\pi/4} (\cos x)\, e^{x+1} dx$, cominciamo col calcolare:

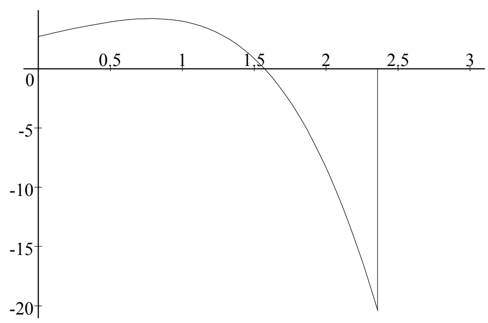
$$\int (\cos x)\, e^{x+1} dx = \boxed{\text{per parti con fattor finito } (\cos x)\text{:}} = (\cos x)\, e^{x+1} - \int (-\sin x)\, e^{x+1} dx =$$

$$= \boxed{\text{per parti con fattor finito } (\cos x)\text{:}} = (\cos x)\, e^{x+1} + (\sin x)\, e^{x+1} - \int (\cos x)\, e^{x+1} dx$$

cioè $\displaystyle\int (\cos x)\, e^{x+1} dx = \tfrac{1}{2} (\cos x + \sin x)\, e^{x+1} + c$. Dunque

$$\int_0^{3\pi/4} (\cos x)\, e^{x+1} dx = \frac{1}{2} \left[(\cos x + \sin x)\, e^{x+1}\right]_0^{3\pi/4} = \frac{1}{2} \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] e^{(3\pi+4)/4} - \frac{1}{2} [1 - 0]\, e = \boxed{-\frac{e}{2}}$$

Questo integrale <u>non rappresenta l'area</u> della regione limitata di piano compresa tra l'asse x, il grafico della funzione integranda e le due rette di equazione $x = 0$ e $x = \dfrac{3\pi}{4}$, poiché la funzione cambia segno nell'intervallo $\left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right]$ (vedi figura) e addirittura l'integrale risulta negativo.



4. La funzione $f(t) = \dfrac{1}{(t+1)\ln(1+2t)}$

(a) è definita purché $\begin{cases} t > -\frac{1}{2} \text{ (insieme di definizione del logaritmo)} \\ t \neq -1, 0 \text{ (insieme di definizione del quoziente)} \end{cases}$ cioè per

$t \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$. Si noti che in $(0, +\infty)$ la funzione è continua e sempre positiva, mentre in $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ è continua e negativa.

(b) Per $t \to +\infty$ risulta $f(t) \simeq \dfrac{1}{t \ln(2t)}$ (e quindi la funzione tende a zero).

Per $t \to 0^+$, invece, $f(t) \simeq \dfrac{1}{1 \cdot 2t} = \dfrac{1}{2t}$ poiché $\ln(1+2t) \simeq 2t$ (e quindi la funzione diverge, e in particolare risulta illimitata sul suo insieme di definizione)

(c) Per l'osservazione appena fatta $\int_{0^+}^{+\infty} f(t)\, dt = \int_{0^+}^{1} f(t)\, dt + \int_{1}^{+\infty} f(t)\, dt$ è un integrale improprio contemporaneamente di prima e di seconda specie.

La funzione $f(t)$ è positiva in $(0, +\infty)$: quindi si può applicare un criterio di convergenza per gli integrali impropri, in particolare quello del confronto asintotico.

Visto che, per $t \to 0^+$, $f(t) \simeq \dfrac{1}{2t}$ e l'integrale improprio <u>di seconda specie</u> $\int_{0^+}^{1} \dfrac{1}{2t} dt$ diverge a $+\infty$ (poiché al denominatore della funzione integranda c'è la potenza di t con esponente $= 1$), anche l'integrale improprio di seconda specie $\int_{0^+}^{1} f(t)\, dt$ diverge a $+\infty$ (criterio del confronto asintotico).

Diverge a $+\infty$ per il criterio del confronto asintotico anche l'integrale improprio di <u>prima specie</u> $\int_{1}^{+\infty} f(t)\, dt$ poiché, per $t \to +\infty$, risulta $f(t) \simeq \dfrac{1}{t \ln(2t)}$ e si ha

$\int_{1}^{+\infty} \dfrac{1}{t \ln(2t)} dt = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_{1}^{x} \dfrac{1}{t \ln(2t)} dt = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\ln(\ln 2t)\right]_1^x = +\infty.$

Dunque $\boxed{\int_{0^+}^{+\infty} f(t)\, dt \text{ diverge a } +\infty}$, poiché entrambi gli integrali di cui è somma divergono a $+\infty$.

5. La funzione di due variabili $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 2xy$ ha derivate parziali $f_x(x, y) = 3x^2 + y^2 - 2y$ e $f_y(x, y) = 2xy - 2x = 2x(y-1)$. I suoi punti critici sono quelli le cui coordinate annullano il gradiente $\mathbf{grad}\,(f(x, y)) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$, cioè le soluzioni del sistema: $\begin{cases} 3x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ x(y-1) = 0 \end{cases}$.

La seconda equazione ha soluzioni $x = 0$ e $y = 1$, che sostituite nella prima portano ai due sistemi

$$\begin{cases} x = 0 \\ (y-2)\, y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = 1 \\ 3x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

che hanno soluzioni: $\boxed{(0,0), (0,2) \text{ e } \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)\text{: questi sono i punti critici}}$.

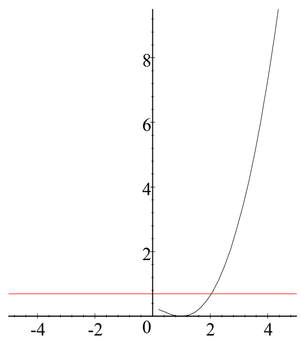
Tenuto conto che l'hessiano è $H(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & 2y-2 \\ 2y-2 & 2x \end{vmatrix} = 12x^2 - 4(y-1)^2$, si vede che i primi due punti critici sono punti di sella (infatti l'hessiano $-4(y-1)^2$ è negativo in entrambi i casi). Invece negli altri due punti l'hessiano $12x^2$ vale 4, quindi è positivo: i due punti critici sono estremi locali. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$ è un minimo locale poiché $\frac{6}{\sqrt{3}} > 0$, mentre $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$ è un massimo locale poiché $\frac{-6}{\sqrt{3}} < 0$.

6. $y' = (x \ln x)(y^2 + y)$ è un'equazione differenziale del I ordine a variabili separabili: la funzione in x è definita e continua in $(0, +\infty)$ mentre quella in y è definita e continua su tutto l'asse reale e quindi ci aspettiamo di trovare soluzione al problema di Cauchy in ogni punto del semipiano delle $x > 0$.
Sono sicuramente soluzioni dell'equazione differenziale le due funzioni $y(x) = 0$ e $y(x) = -1$, che annullano il fattore in y: nessuna delle due è soluzione del nostro problema di Cauchy ($y(1) = 1$).
Possiamo quindi dividere entrambi i membri dell'equazione per $(y^2 + y)$ e cercare l'integrale generale risolvendo l'equazione $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2 + y} = \int (x \ln x)\, dx$.
Osservando che $\dfrac{1}{y^2 + y} = \dfrac{A}{y} + \dfrac{B}{y + 1} \iff A = 1 = -B$, si trova $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2 + y} = \ln\left|\frac{y}{y + 1}\right| + C_1$
Inoltre $\displaystyle\int (x \ln x)\, dx = \tfrac{1}{2}x^2 \ln x - \tfrac{1}{4}x^2 + C_2$ (integrazione per parti con fattor differenziale xdx).
Dunque $\ln\left|\dfrac{y}{y + 1}\right| = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$ (con $c \in \mathbb{R}$), cioè $\dfrac{y}{y + 1} = \pm e^c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2}$ che riscriveremo

$$(*) \qquad \frac{y(x)}{y(x) + 1} = k \cdot e^{\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2} \text{ (con } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Per avere l'<u>integrale generale</u> basta ricavare $y(x)$: per agevolare il conto denotiamo con $F(x)$ la funzione $k \cdot e^{\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2}$.
Si trova allora $y = (y + 1)\, F(x)$, vale a dire $y(x) = \dfrac{F(x)}{1 - F(x)}$. Notiamo che questa funzione è definita solo se $F(x) \neq 1$
Per la soluzione del problema di Cauchy si deve avere $y(1) = 1$; sostituendo questi valori in $(*)$ si trova: $\dfrac{1}{1 + 1} = k \cdot e^{-\frac{1}{4}}$. Dunque si ha soluzione al problema di Cauchy per $k = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}}$.

Essa ha la forma $\boxed{y(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}}}{2 - e^{\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}}}}$.
Il suo dominio è costituito dall'intervallo $(0, \alpha)$ ove α è la soluzione (maggiore di 1, come mostrato dal grafico a fianco) dell'equazione $\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4} = \ln 2$ poiché in tale intervallo la funzione $y(x)$ è definita continua e derivabile.



7. I tre vettori sono indipendenti se il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 5 & \boxed{0} & -1 \\ \boxed{4} & k & \boxed{-2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & k+1 \end{pmatrix}$ ottenuta accostandoli è pari a tre. Si vede, esaminando la sottomatrice quadrata contenente i numeri riquadrati, che il rango di A non è mai inferiore a 2. Orlando questa sottomatrice nei due modi possibili si ha una matrice il cui determinante vale $3k - 20$ ed un'altra il cui determinante vale $(k + 1)(-6)$. Tali determinanti si annullano per valori diversi di k (cioè quando è nullo uno l'altro non lo è): quindi A contiene, per ogni valore di k, una matrice quadrata di ordine 3 con determinante diverso da zero e quindi per ogni valore di k la matrice A ha rango 3, cioè i tre vettori dati sono indipendenti.