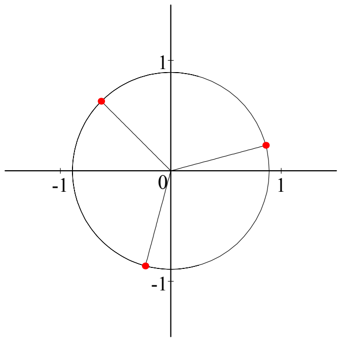
Soluzioni del compito di Istituzioni di Matematiche per Chimica (20/7/06)

1. $w = (1-i)^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ha modulo $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e argomento principale $\frac{\pi}{4}$. Quindi le sue radici terze stanno su una circonferenza centrata nell'origine del piano di Argand Gauss e di raggio $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$ e sono ai vertici del triangolo equilatero corrispondente agli argomenti $\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}$, con $k = 0,\ 1,\ 3$.



Le radici terze sono quindi rappresentate dai punti rossi in figura e (lette in verso antiorario a partire da quella di argomento $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{4}$) hanno rappresentazione algebrica

$z_1 = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}i$

$z_2 = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) =$
$= \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$
$= \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{4}} + i\frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{4}}$

$z_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{4}} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt[3]{4}}$ poiché questa radice è simmetrica della z_2 rispetto alla bisettrice del II-IV quadrante

2. La funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x+1}$

   (a) è definita purché risulti $\begin{cases} x^2 - x \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases}$ cioè in $(-\infty,-1) \cup (-1,0] \cup [1,+\infty)$; è positiva quando lo è il denominatore, cioè per $x \in (1,+\infty)$ e si annulla se e solo se $x = 0$ oppure $x = 1$.

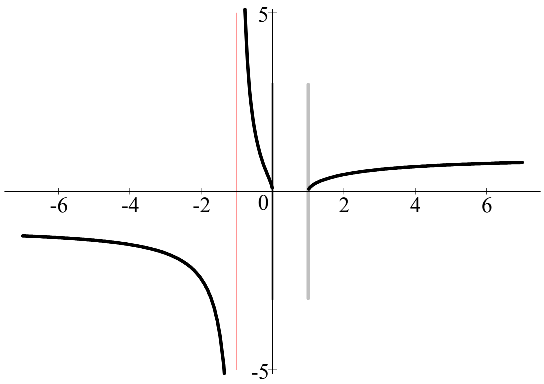
   (b) Non è necessario calcolare i limiti per x che tende a 0 da sinistra oppure a 1 da destra, visto che in questi punti la funzione è definita e continua (rispettivamente da sinistra e da destra).
   Tenuto conto che $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$, risulta $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = -1$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1$. Inoltre $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$
   Quindi ci sono i seguenti asintoti:
   $\boxed{y = -1 \text{ asintoto orizzontale}}$ per $x \to -\infty$.
   $\boxed{x = -1 \text{ asintoto verticale}}$ per $x \to -1$ tanto da destra che da sinistra.
   $\boxed{y = 1 \text{ asintoto orizzontale}}$ per $x \to +\infty$.

   (c) $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}\left[\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}(x+1) - \sqrt{x^2-x}\right] = \dfrac{2x^2+x-1-2x^2+2x}{2(x+1)^2\sqrt{x^2-x}} =$
   $= \dfrac{3x-1}{2(x+1)^2\sqrt{x^2-x}} \geq 0$ se e solo se
   $\begin{cases} \text{la derivata è definita} \\ 3x-1 \geq 0 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} x \in (-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(1,+\infty) \\ x \geq 1/3 \end{cases}$ cioè in $(1,+\infty)$. Ne

segue che la funzione decresce in ciascuno dei due intervalli $(-\infty,-1)$ e $(-1,0)$ e cresce in $(1,+\infty)$ e non ha né massimi né minimi relativi (la funzione è definita in $x=0$ solo da destra e $x=1$ solo da sinistra).

(d) Negli zeri la derivata non esiste ma si può calcolarne il limite:
$\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-1}{2\sqrt{-x}} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2}{8\sqrt{x-1}} = +\infty$: quindi le tangenti nei due zeri sono parallele all'asse y cioè hanno equazioni rispettivamente $x=0$ e $x=1$.
Poiché $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty = \lim\limits_{x\to -1^+} f'(x)$, nell'intervallo $(-1,0)$ la funzione derivata deve prima crescere e poi decrescere: ne segue la presenza nell'intervallo di un punto di flesso.

(e) Il grafico di $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x+1}$ è il seguente:



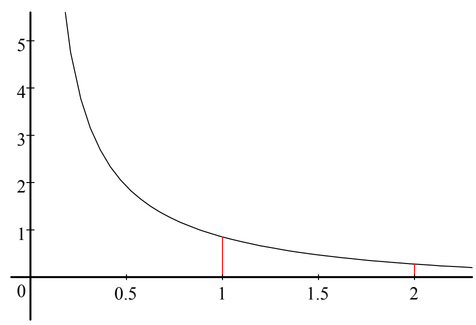
3. Per calcolare l'integrale definito $\int_1^2 dx$, cominciamo col calcolare:

$$\int \frac{2e^x}{e^{2x}-1}\,dx = \boxed{\text{per sostituzione con } e^x = t \text{ e } e^x dx = dt} = \int \frac{2}{t^2-1}\,dt =$$
$$= \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \ln|t-1| - \ln|t+1| + c = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c = \ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + c.$$

Dunque

$$\int_1^2 \frac{2e^x}{e^{2x}-1}\,dx = \left[\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|\right]_1^2 = \ln\left|\frac{e^2-1}{e^2+1}\right| - \ln\left|\frac{e^1+1}{e^1-1}\right| = \ln\left|\frac{e^2-1}{e^2+1}\cdot\frac{e-1}{e+1}\right| = \boxed{\ln\left(\frac{(e-1)^2}{e^2+1}\right)}$$

Questo integrale rappresenta l'area della regione limitata di piano compresa tra l'asse x, il grafico della funzione integranda e le due rette di equazione $x=1$ e $x=2$, poiché $\dfrac{2e^x}{e^{2x}-1}$ è non negativa nell'intervallo $(1,2)$ (tanto il numeratore che il denominatore lo sono poichè $x>0$! vedi anche figura).



4. La funzione $f(t) = \dfrac{1-e^{-2t}}{t^{3/2}}$

   (a) è definita purché $t > 0$ (infatti perché sia definita la potenza al denominatore deve essere $t \geq 0$ e perché lo sia il quoziente deve essere $t \neq 0$)
   Si noti che in tutto l'insieme di definizione la funzione è continua e sempre positiva.

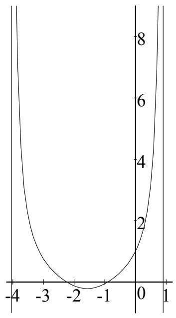
   (b) Per $t \to +\infty$ risulta $f(t) \simeq \dfrac{1}{t^{3/2}}$ poiché e^{-2t} tende a 0 (quindi $f(t)$ tende a zero). Per $t \to 0^+$, invece, $f(t) \simeq \dfrac{2t}{t^{3/2}} = \dfrac{2}{t^{1/2}}$ poiché $1 - e^{-2t} \simeq -(-2t)$ (quindi $f(t)$ tende a $+\infty$).

   (c) Per l'osservazione appena fatta $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ è somma di un integrale improprio di seconda specie e di un integrale improprio di prima specie.
   Entrambi gli integrali sono limiti che esistono sicuramente in quanto la funzione $f(t)$ è positiva in $(0, +\infty)$: quindi la funzione integrale è monotona crescente e come tale o converge o diverge; per dirimere la questione si può applicare un criterio di convergenza per gli integrali impropri, in particolare quello del confronto asintotico.
   Per $t \to +\infty$ risulta $f(t) \simeq \dfrac{1}{t^{3/2}}$ e si ha $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^{3/2}}dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^x \dfrac{1}{t^{3/2}}dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[-\dfrac{2}{t^{1/2}}\right]_1^x = 2$: visto che la funzione asintotica ha integrale improprio di prima specie convergente, anche $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.
   Per $t \to 0$ risulta$f(t) \simeq \dfrac{2}{t^{1/2}}$ e si ha $\int_{0^+}^1 \dfrac{2}{t^{1/2}}dt = \lim\limits_{x\to0^+} \int_x^1 \dfrac{2}{t^{1/2}}dt = \lim\limits_{x\to0^+} \left[4t^{1/2}\right]_{0^+}^1 = 4$: visto che la funzione asintotica ha integrale improprio di seconda specie convergente, anche $\int_{0^+}^1 f(t)\,dt$ converge.
   Dunque $\boxed{\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge}}$, poiché entrambi gli integrali di cui è somma convergono.

5. La funzione di due variabili $f(x,y) = \ln(2x - x^2 - y^2) - x$ è definita purché risulti $2x - x^2 - y^2 > 0$ cioè nei punti interni al cerchio di centro $(1,0)$ e raggio 1.
   In particolare è definita in $(1,0)$ e $f(1,0) = -1$.
   Essa ha derivate parziali $f_x(x,y) = \dfrac{2-2x}{2x-x^2-y^2} - 1$ e $f_y(x,y) = \dfrac{-2y}{2x-x^2-y^2}$ e quindi il gradiente, $\mathbf{grad}\,(f(x,y)) = (f_x(x,y)\,, f_y(x,y))$, nel punto $(1,0)$ vale $(-1,0)$.
   Ne segue che il piano tangente in $P = (1,0,-1)$ ha equazione:
   $z - (-1) = (-1,0) \bullet (x-1, y-0)$ cioè $z + 1 = 1 - x$ vale a dire $\boxed{x + z = 0}$.

6. $y' = (1+y^2)\cos x$ è un'equazione differenziale del I ordine a variabili separabili: tanto la funzione in x che quella in y sono definite e continue su tutto l'asse reale e quindi ci aspettiamo di trovare soluzione al problema di Cauchy in ogni punto del piano.
   Il fattore in y non si annulla per alcun valore di y: dunque si può passare direttamente alla separazione delle variabili:
   $\displaystyle\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \cos x dx$, implica $\arctan y = \sin x + C$ (con C costante reale, ma attenzione, visto che l'immagine di $\arctan y$ è $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ l'insieme $[C-1, C+1] \cap \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ non deve risultare

vuoto): questo è l'integrale generale cercato descritto in forma implicita.
In particolare se si vuole determinare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 1$, basta sostituire: $\arctan 1 = \sin 0 + C$ per trovare $C = \frac{\pi}{4}$; quindi la soluzione particolare è $\arctan y = \sin x + \frac{\pi}{4}$.
Se si vuole l'integrale in forma esplicita si può scrivere $\boxed{y(x) = \tan(\sin x + C)}$, e tener conto che deve risultare $-\frac{\pi}{2} - C < \sin x < \frac{\pi}{2} - C$: in particolare le leggi così trovate sono definite e derivabili solo su intervalli e solo su ciascuno di questi sono soluzioni.
Nel caso del problema di Cauchy affrontato si vede che si deve avere $\sin x < \frac{\pi}{4}$ e visto che la soluzione deve essere definita in $x = 0$ si trova che <u>l'intervallo su cui considerare la soluzione</u> $\boxed{y(x) = \tan\left(\sin x + \frac{\pi}{4}\right)}$ <u>è</u> $\left(-\pi - \arcsin\frac{\pi}{4}, \arcsin\frac{\pi}{4}\right)$.



7. Il prodotto delle matrici assegnate
$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & k & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4+k & 16 \\ -1 & 2-k & -4 \\ 6 & 3k & 24 \end{pmatrix}$$
è una matrice 3×3 la cui ultima colonna è sicuramente multipla della prima poiché è ottenuta moltiplicando ciascuna riga di A per la terza colonna di B che è multipla della prima colonna di B. Quindi la matrice AB ha al massimo rango 2. Un ragionamento analogo mostra che se $\boxed{k = 4}$ anche la seconda colonna di AB è multipla della prima e quindi il $\boxed{\text{rango di } AB \text{ è } 1}$, mentre per $\boxed{k \neq 4}$ le due colonne sono indipendenti e quindi il $\boxed{\text{rango di } AB \text{ è } 2}$.
A quest'ultimo risultato si può pervenire anche osservando che il determinante della sottomatrice di AB formato dalle prime due righe e colonne, $8-4k+4+k$, si annulla se e solo se $k = 4$ (e quindi per $k \neq 4$ il rango di AB è 2) e osservando che, se $k = 4$, $AB = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 16 \\ -1 & -2 & -4 \\ 6 & 12 & 24 \end{pmatrix}$ e quindi anche gli altri minori estratti dalle prime due colonne sono nulli e quindi il rango di AB è 1.