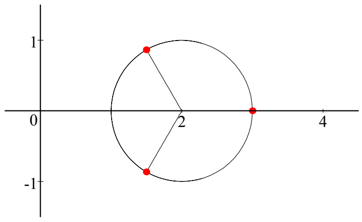
Soluzioni del compito di Istituzioni di Matematiche per Chimica (21/9/06)

1. L'equazione $(z-2)^3 = 1$ ha 3 soluzioni complesse, essendo un'equazione algebrica di terzo grado (teorema fondamentale dell'algebra). Per trovarle, si osservi che le soluzioni dell'equazione $w^3 = 1$ sono le radici terze dell'unità: $w_0 = 1$, $w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e quindi risulta $z_0 - 2 = 1$, $z_1 - 2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 - 2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, cioè $z_0 = 3$, $z_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.



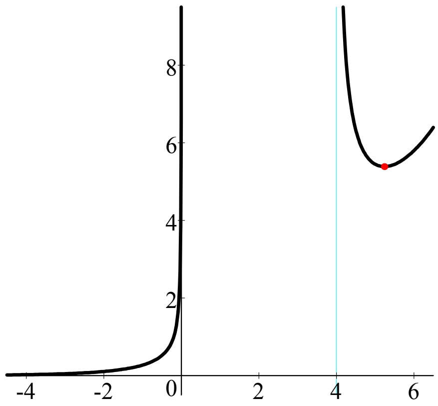
2. La funzione $f(x) = \dfrac{e^{x/2}}{\sqrt{x^2 - 4x}}$

   (a) è definita in $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ poiché il radicando deve essere non negativo e il denominatore non deve essere nullo. La funzione non si annulla mai e visto che numeratore e denominatore sono positivi, la funzione è positiva ove definita.

   (b) In tutti gli estremi dell'insieme di definizione la funzione non è definita: dunque si devono studiare i limiti:
   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{x/2}}{-x} = 0^+$ poiché, per $x \to -\infty$, $e^{x/2} \to 0$. Dunque per $x \to -\infty$ c'è $\boxed{\text{asintoto orizzontale: } y = 0}$
   $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{\sqrt{-4x}} = +\infty$, poiché per $x \to 0^-$, x^2 è infinitesimo di ordine superiore a $-4x$. Dunque per $x \to 0^-$ c'è $\boxed{\text{asintoto verticale: } x = 0}$
   $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{e^4}{2\sqrt{x-4}} = +\infty$, poiché per $x \to 4^+$, $x\,(x-4) \simeq 4\,(x-4)$. Dunque per $x \to 4^+$ c'è $\boxed{\text{asintoto verticale: } x = 4}$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{x/2}}{x} = +\infty$, poiché, per $x \to +\infty$, $e^{x/2} \to +\infty$ e il suo ordine di infinito è superiore a quello di x. Per un motivo analogo non possono esistere asintoti obliqui.

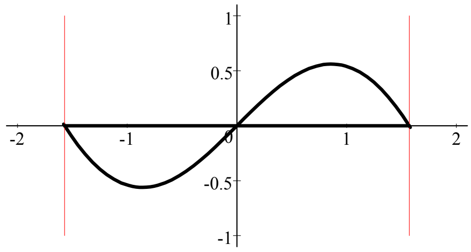
   (c) $$f'(x) = \frac{\dfrac{e^{x/2}}{2} \cdot \sqrt{x^2 - 4x} - e^{x/2} \cdot \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}}{x^2 - 4x} = \frac{e^{x/2}\,(x^2 - 4x) - 2e^{x/2}\,(x-2)}{2\,(x^2-4x)\,\sqrt{x^2-4x}} =$$
   $$= \frac{e^{x/2}\,(x^2 - 6x + 4)}{2\,(x^2-4x)\,\sqrt{x^2-4x}} \geq 0 \text{ se e solo se } \begin{cases} x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \\ x^2 - 6x + 4 \geq 0 \end{cases}$$
   Solo uno tra i due zeri del numeratore, che sono $x = 3 \pm \sqrt{5}$, cade nell'insieme di definizione della funzione. La disuguaglianza risulta perciò soddisfatta negli intervalli $(-\infty, 0)$ e $\left(3 + \sqrt{5}, +\infty\right)$ e su ciascuno di essi la funzione risulta crescente; invece nell'intervallo $\left(4, 3 + \sqrt{5}\right)$ la derivata è negativa e quindi la funzione decresce. Ne segue che in $x = 3 + \sqrt{5}$ c'è un punto di minimo relativo. Si ha $f\left(3 + \sqrt{5}\right) = \dfrac{e^{\left(3+\sqrt{5}\right)/2}}{\sqrt{2 + 2\sqrt{5}}}$

(d) Sotto è rappresentato il grafico di $f(x) = \dfrac{e^{x/2}}{\sqrt{x^2 - 4x}}$.



3. Per calcolare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \dfrac{e^{-x^{-2}}}{x} = x^{-1}e^{-x^{-2}}$ nel punto di ascissa 1 si deve trovare l'ordinata di tale punto $f(1) = \dfrac{e^{-1}}{1} = e^{-1}$ e il coefficiente angolare della tangente che corrisponde al valore della derivata prima $f'(x) = -\left(x^{-2}\right)e^{-x^{-2}} + \left(x^{-1}\right)\left(2x^{-3}\right)e^{-x^{-2}} = \left(2x^{-4} - x^{-2}\right)e^{-x^{-2}}$ in $x = 1$, $f'(1) = (2-1)\,e^{-1} = e^{-1}$. Dunque l'equazione della retta tangente è $y - e^{-1} = e^{-1}(x-1)$, cioè $\boxed{y = e^{-1}x}$.

4. La funzione $f(x) = x\cos x$ è dispari (in quanto prodotto di una funzione dispari, x, con una pari, $\cos x$). Quindi per calcolare l'area della regione limitata di piano compresa tra l'asse x, il grafico della funzione e le due rette di equazione $x = -\pi/2$ e $x = \pi/2$ che sono simmetriche rispetto all'origine, non si può calcolare l'integrale della funzione tra i due estremi (che è nullo!). Visto che la figura è simmetrica rispetto all'origine basta invece calcolare il doppio dell'integrale della funzione tra 0 e $\pi/2$.
Ora $\displaystyle\int x\cos x dx = \boxed{\text{per parti con fattor finito } x\text{:}} = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + c$
Dunque
$\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos x dx = [x\sin x + \cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$ e quindi l'area della regione considerata vale $\boxed{\pi - 2}$



.

5. La funzione $f(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{(t^2+1)\ln(1+2t)}$

(a) è definita purché $\begin{cases} t \geq 0 \text{ (insieme di definizione della radice)} \\ t > -\frac{1}{2} \text{ (insieme di definizione del logaritmo)} \\ t \neq 0 \text{ (insieme di definizione del quoziente)} \end{cases}$ cioè per $t \in (0, +\infty)$. In tale intervallo la funzione è continua e sempre positiva.

(b) Per $t \to +\infty$ risulta $f(t) \simeq \dfrac{\sqrt{t}}{t^2 \ln(2t)} = \dfrac{1}{t^{3/2}\ln(2t)}$ (e quindi la funzione tende a zero).

Per $t \to 0^+$, invece, $f(t) \simeq \dfrac{\sqrt{t}}{1 \cdot 2t} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ poiché $\ln(1+2t) \simeq 2t$ (e quindi la funzione diverge, e in particolare risulta illimitata sul suo insieme di definizione)

(c) Per l'osservazione appena fatta $\int_{0^+}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{0^+}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$ è un integrale improprio contemporaneamente di prima e di seconda specie.
La funzione $f(t)$ è positiva in $(0, +\infty)$: quindi si può applicare un criterio di convergenza per gli integrali impropri, in particolare quello del confronto asintotico.
Visto che, per $t \to 0^+$, $f(t) \simeq \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ e l'integrale improprio <u>di seconda specie</u> $\int_{0^+}^{1} \dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt$ converge (poiché al denominatore della funzione integranda c'è la potenza di t con esponente < 1), anche l'integrale improprio di seconda specie $\int_{0^+}^{1} f(t)\,dt$ converge (criterio del confronto asintotico).
Quanto all'integrale improprio di <u>prima specie</u> $\int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$, osserviamo che, per $t \to +\infty$, risulta $f(t) \simeq \dfrac{1}{t^{3/2}\ln(2t)} < \dfrac{1}{t^{3/2}}$. Ora $\int_{1}^{+\infty} \dfrac{1}{t^{3/2}}dt$ converge (poiché al denominatore della funzione integranda c'è la potenza di t con esponente > 1) e quindi per il criterio del confronto anche $\int_{1}^{+\infty} \dfrac{1}{t^{3/2}\ln(2t)}dt$ converge e per il criterio del confronto asintotico converge anche $\int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$. Dunque $\boxed{\int_{0^+}^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge}}$, poiché entrambi gli integrali di cui è somma convergono.

6. La funzione di due variabili $f(x,y) = x^3 - x^2y + y^2 - 3x + y$ ha derivate parziali $f_x(x,y) = 3x^2 - 2xy - 3$ e $f_y(x,y) = -x^2 + 2y + 1$. I suoi punti critici sono quelli le cui coordinate annullano il gradiente $\mathbf{grad}\,(f(x,y)) = (f_x(x,y)\,, f_y(x,y))$, cioè le soluzioni del sistema: $\begin{cases} 3x^2 - 2xy - 3 = 0 \\ -x^2 + 2y + 1 = 0 \end{cases}$.
Sostituendo $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ nella prima equazione si trova $3x^2 - x^3 + x - 3 = 0$ che, raccogliendo $(x-3)$, porta ai due sistemi

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \end{cases}$$

che hanno soluzioni: $\boxed{(3,4) \text{ e } (\pm 1, 0)\text{: questi sono i punti critici}}$.

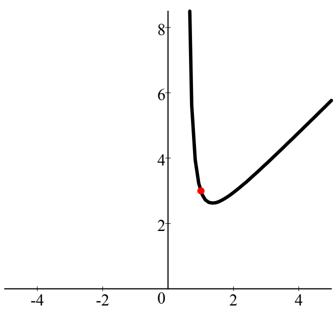
Tenuto conto che l'hessiano è $H(x,y)=\begin{vmatrix} 6x-2y & -2x \\ -2x & 2 \end{vmatrix}=4\left(3x-y-x^2\right)$, si vede che $(3,4)$ e $(-1,0)$ sono punti di sella (infatti l'hessiano è negativo in entrambi i casi). Invece in $(1,0)$ l'hessiano vale 8, quindi è positivo: il punto critico è un minimo locale poiché $f_{yy}(x,y)=2>0$.

7. $y'+\dfrac{2}{x^3}\cdot y=\dfrac{2}{x^2}+1$ è un'equazione differenziale del I ordine lineare non omogenea: tanto la funzione coefficiente che la funzione termine noto sono definite e continue in ciascuno dei due intervalli $(-\infty,0)$ e $(0,+\infty)$: quindi ci aspettiamo di trovare soluzione al problema di Cauchy $y\,(1)=3$ in ogni punto del semipiano delle $x>0$.
L'equazione omogenea associata $z'=-\dfrac{2}{x^3}\cdot z$, oltre alla soluzione $z=0$, ha le soluzioni $\displaystyle\int\frac{dz}{z}=\int-\frac{2}{x^3}dx$, cioè $\ln|z|=x^{-2}+k$ vale a dire, tenuto conto anche della soluzione nulla, $\boxed{z=c\cdot e^{x^{-2}}}$ (con $c\in\mathbb{R}$).
Applicando il metodo di variazione della costante, si trova che una soluzione particolare deve avere la forma $\overline{y}\,(x)=c(x)\cdot e^{x^{-2}}$, ove - tenuto conto che $\dfrac{2}{x^3}=2x^{-3}$ e $\dfrac{2}{x^2}=2x^{-2}$ - $c\,(x)$ deve essere tale che
$\left(c'(x)\cdot e^{x^{-2}}-c(x)\cdot(2x^{-3})\cdot e^{x^{-2}}\right)+2x^{-3}\cdot c(x)\cdot e^{x^{-2}}=2x^{-2}+1$, cioè

$$c(x)=\int(2x^{-2}+1)\cdot e^{-x^{-2}}dx=\boxed{\begin{array}{l}\text{per parti, con}\\ \text{fatt. finito } e^{-x^{-2}}\end{array}}=e^{-x^{-2}}(x-2x^{-1})-\int e^{-x^{-2}}(2x^{-3})(x-2x^{-1})\,dx=$$
$$=e^{-x^{-2}}(x-2x^{-1})-2\int e^{-x^{-2}}(x^{-2}-2x^{-4})\,dx=e^{-x^{-2}}(x-2x^{-1})+2x^{-1}e^{-x^{-2}}+C=$$
$$=xe^{-x^{-2}}+C$$

poiché, come visto nell'esercizio 3, $\left(x^{-1}e^{-x^{-2}}\right)'=(2x^{-4}-x^{-2})\,e^{-x^{-2}}$. Quindi una soluzione particolare è $\overline{y}(x)=\left(xe^{-x^{-2}}\right)\cdot e^{x^{-2}}$ e l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$\boxed{y(x)=x+c\cdot e^{x^{-2}}}$: le funzioni di questo tipo sono soluzioni (cioè sono derivabili e soddisfano l'equazione differenziale) in ciascuno dei due intervalli $(-\infty,0)$ e $(0,+\infty)$.
In particolare perché la funzione $y(x)=x+c\cdot e^{x^{-2}}$ soddisfi la condizione iniziale $y(1)=3$, basta che sia $3=1+ce$ cioè $c=2e^{-1}$.
Quindi la soluzione del problema di Cauchy è la funzione $\boxed{y(x)=x+2e^{x^{-2}-1}}$ con dominio $(0,+\infty)$.



8. Quattro vettori in $\mathbb{R}^3$ sono sempre dipendenti (in quanto sono in numero superiore alla dimensione 3 dello spazio vettoriale). Quindi, per nessun valore di k i quattro vettori assegnati sono indipendenti.