

Il presente foglio deve essere riconsegnato, compilato in ogni sua parte in stampatello.

Cognome _____ Nome _____ matr. _____

ISTITUZIONI DI MATEMATICHE PER CHIMICA (19/7/2007)

1. (3 punti) Dopo averle rappresentate nel piano di Argand - Gauss, si determinino tutte le soluzioni complesse dell'equazione $x^6 = 64$ e le si calcolino in forma algebrica.

2. (12 punti) Della funzione $f(x) = \ln\left(\frac{x-4}{x^2-3x}\right)$ si determinino:

- a) insieme di definizione, zeri e segno;
- b) limiti ed eventuali asintoti negli estremi dell'insieme di definizione;
- c) intervalli di monotonia, punti di estremo relativo e valori in essi assunti da $f(x)$;
- d) equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa 1;
- e) grafico di $f(x)$.

3. (3 punti) Si calcoli l'integrale indefinito della funzione $\frac{x}{1+x^4}$.

4. (7 punti) Si consideri la funzione $f(t) = \begin{cases} -\frac{5}{2} & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ -\frac{1}{2}t^2 + 4t - 6 & \text{se } 1 < t \leq 4 \end{cases}$

a) La funzione $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ è definita nell'intervallo $[0,4]$? Si motivi.

b) Si calcoli $F(x)$.

c) Si trovi l'area della regione limitata di piano delimitata dal grafico di $f(t)$ e dalle rette di equazione $t = 0$, $t = 4$ e $y = \frac{5}{2}$.

5. (3 punti) Dopo aver detto di che tipo è, si stabilisca se l'integrale $\int_1^{+\infty} t^{-1}e^{-t} dt$ converge.

6. (4 punti) Si determinino e si studino i punti critici della funzione di due variabili

$$f(x, y) = x^2y + 2y^3 - x^2 - 4y^2.$$

7. (4 punti) Si consideri l'equazione differenziale: $y' = \sqrt{t}(2 - 3y)$.

a) Dopo averla riconosciuta, se ne calcoli l'integrale generale.

b) Si determini la soluzione particolare che soddisfa la condizione iniziale $y(1) = 0$.

8. (4 punti) In dipendenza del valore del parametro reale k si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k-1 & -2 & -1 \\ 3 & -k & k+1 & 2 \\ 9 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$