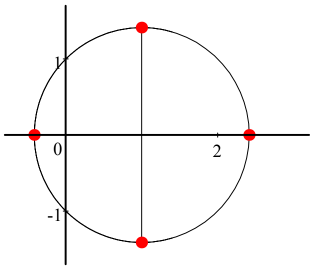
Soluzioni del compito di Istituzioni di Matematiche per Chimica (23/1/07)

1. L'equazione $(z-1)^4 = 4$ ha 4 soluzioni complesse, essendo un'equazione algebrica di quarto



grado (teorema fondamentale dell'algebra). Per trovarle, si osservi che le soluzioni dell'equazione $w^4 = 4$ sono le radici quarte di 4:
$w_0 = \sqrt{2}$, $w_1 = i\sqrt{2}$, $w_2 = -\sqrt{2}$, $w_3 = -i\sqrt{2}$
e quindi risulta
$z_0 - 1 = \sqrt{2}$, $z_1 - 1 = \sqrt{2}i$, $z_2 - 1 = -\sqrt{2}$, $z_3 - 1 = -i\sqrt{2}$,
cioè $z_0 = 1 + \sqrt{2}$, $z_1 = 1 + \sqrt{2}i$, $z_2 = 1 - \sqrt{2}$, $z_3 = 1 - i\sqrt{2}$.

2. La funzione $f(x) = \ln(e^x + 4e^{-x})$

   (a) è definita in $\mathbb{R}$ poiché entrambi gli addendi che formano l'argomento del logaritmo sono positivi. Si devono studiare quindi i limiti:
   $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln e^{-x}(4+e^{2x}) = \lim_{x\to-\infty} \ln(e^{-x}) + \ln(4+e^{2x}) = \lim_{x\to-\infty} -x + \ln 4 = +\infty$
   poiché, per $x \to -\infty$, $e^{2x} \to 0$. Inoltre la scomposizione appena utilizzata evidenzia che per $x \to -\infty$ c'è $\boxed{\text{asintoto obliquo: } y = -x + \ln 4}$
   $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln e^x(1+4e^{-2x}) = \lim_{x\to+\infty} \ln(e^x) + \ln(1+4e^{-2x}) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$
   poiché, per $x \to +\infty$, $e^{-2x} \to 0$. Inoltre la scomposizione appena utilizzata evidenzia che per $x \to +\infty$ c'è $\boxed{\text{asintoto obliquo: } y = x}$.

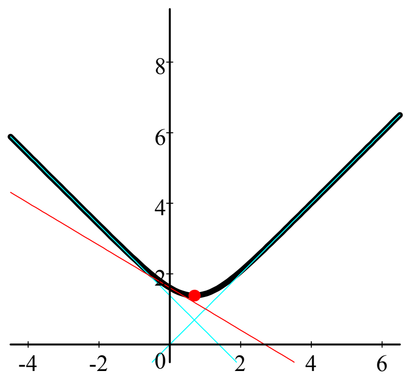
   (b) $f'(x) = \dfrac{e^x - 4e^{-x}}{e^x + 4e^{-x}} = e^{-x} \cdot \dfrac{e^{2x} - 4}{e^x + 4e^{-x}} \geq 0$ se e solo se $e^{2x} \geq 4$, cioè (essendo e^x sempre >0) se e solo se $e^x > 2$ vale a dire $x > \ln 2$.

   Ne segue che la funzione cresce in $(\ln 2, +\infty)$, decresce in $(-\infty. \ln 2)$ e in $x = \ln 2$ ha un punto di minimo relativo. Si ha $f(\ln 2) = \ln(2 + 4 \cdot 2^{-1}) = \ln 4$. Visto che tale minimo è anche assoluto e che il valore in esso assunto dalla funzione è positivo, si deduce che la funzione è sempre positiva.

   (c) $f''(x) = \dfrac{(e^x + 4e^{-x})^2 - (e^x - 4e^{-x})^2}{(e^x + 4e^{-x})^2} = \dfrac{16}{(e^x + 4e^{-x})^2} > 0$ per ogni valore reale: quindi la funzione è convessa su tutto il suo insieme di definizione.

   (d) Visto che $f(0) = \ln 5$ e $f'(0) = -\frac{3}{5}$, l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa 0 è $y = -\frac{3}{5}x + \ln 5$.

   (e) A lato, il grafico di $f(x) = \ln(e^x + 4e^{-x})$.



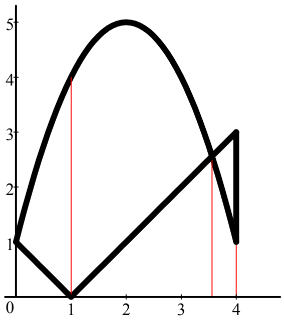
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{(4+x)\sqrt{x}} = \boxed{\begin{array}{l}\text{per sostituzione}\\ \sqrt{x}=s,\ x=s^2\\ dx=2sds\end{array}} = \int \frac{2ds}{4+s^2} = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{s}{2}\right)^2}\right) ds = \arctan\left(\frac{s}{2}\right)+c$

$$= \arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)+c.$$

4. La funzione $f(x) = 5-(x-2)^2$ ha per grafico una parabola concava avente come asse di simmetria la retta $x=2$ e come vertice il punto di coordinate $(2,5)$ (in particolare interseca l'asse y in $(0,1)$ e la retta di equazione $x=4$ in $(4,1)$). La funzione $g(x)=|x-1|$ ha per grafico le due semirette giacenti nel semipiano delle y non negative, aventi origine in $(1,0)$ e parallele alle bisettrici del I-III e II-IV quadrante.

Restringendosi all'intervallo $[0,4]$ da prendere in esame, risulta certamente $f(x)\geq g(x)$ allorché $x\in[0,1]$ (e le due funzioni hanno lo stesso valore in $x=0$), e nel resto dell'intervallo se e solo se $\begin{cases} 5-(x-2)^2 \geq x-1\\ 1<x\leq 4\end{cases}$ cioè $\begin{cases} x^2-3x-2\leq 0\\ 1<x\leq 4\end{cases}$ cioè per $x\in\left(1,\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{17}\right)\right]$.

I punti di intersezione tra i due grafici sono dunque $(0,1)$ e $\left(\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{17}\right),\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{17}\right)\right)$.



Dunque la regione R da prendere in esame è quella delimitata in figura dalla linea più spessa, la cui area è data da

$$\mathcal{A}(R) = \int_0^{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{17}\right)} \left(f(x)-g(x)\right)dx + \int_{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{17}\right)}^4 \left(g(x)-f(x)\right)dx.$$

Si osservi che il primo integrale va calcolato spezzando di nuovo l'intervallo, poiché $g(x)$ ha due differenti rappresentazioni a seconda che sia $x<1$ o >1. Si devono dunque considerare gli integrali indefiniti

$\displaystyle\int \left[5-(x-2)^2-(1-x)\right]dx = \int \left(-x^2+5x\right)dx = -\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+c$

$\displaystyle\int \left[5-(x-2)^2-(x-1)\right]dx = \int \left(-x^2+3x+2\right)dx = -\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+2x+c$ e il suo opposto e risulta

$$\mathcal{A}(R) = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+2x\right]_1^{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{17}\right)} + \left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}-2x\right]_{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{17}\right)}^4$$

Per il calcolo, si ricordi che $\overline{x}=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{17}\right)$ è soluzione di $x^2-3x-2=0$ e quindi $\overline{x}^2=3\overline{x}+2=\frac{1}{2}\left(13+3\sqrt{17}\right)$ e $\overline{x}^3=3\overline{x}^2+2\overline{x}=11\overline{x}+6=\frac{1}{2}\left(45+11\sqrt{17}\right)$. Ne segue che

$$\mathcal{A}(R) = -\tfrac{1}{3}+\tfrac{5}{2}+\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{3}{2}-2\right)+\left(\tfrac{4^3}{3}-\tfrac{3\cdot 4^2}{2}-8\right)+2\left(-\tfrac{1}{6}\left(45+11\sqrt{17}\right)+\tfrac{3}{4}\left(13+3\sqrt{17}\right)+3+\sqrt{17}\right) =$$

$$= -33+21+\tfrac{1}{3}+\left(-15-\tfrac{11}{3}\sqrt{17}+\tfrac{39}{2}+\tfrac{9}{2}\sqrt{17}+6+2\sqrt{17}\right) = \tfrac{1}{6}\left(17\sqrt{17}-7\right)$$

5. La funzione $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t\,(t+1)\,(t+2)}}$

   (a) è definita purché
   $\begin{cases} t\,(t+1)\,(t+2) \geq 0 \text{ (insieme di definizione della radice)} \\ t\,(t+1)\,(t+2) \neq 0 \text{ (insieme di definizione del quoziente)} \end{cases}$ cioè
   per $t \in (-2,-1) \cup (0,+\infty)$.
   In $(-2,-1)$ e in $(0,+\infty)$ la funzione è continua e sempre positiva.

   (b) Per $t \to -2^+$, $f(t) \simeq \dfrac{1}{\sqrt{2}\,(t+2)^{1/2}}$; per $t \to -1^-$, $f(t) \simeq \dfrac{1}{(-1-t)^{1/2}}$; per $t \to 0^+$, $f(t) \simeq \dfrac{1}{\sqrt{2}t^{1/2}}$ (e quindi la funzione diverge, e in particolare risulta illimitata sul suo insieme di definizione). Per $t \to +\infty$, invece, risulta $f(t) \simeq \dfrac{1}{t^{3/2}}$ (e quindi la funzione tende a zero).

   (c) Per l'osservazione appena fatta $\int_{0^+}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{0^+}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$ è un integrale improprio contemporaneamente di prima e di seconda specie.
   La funzione $f(t)$ è positiva in $(0,+\infty)$: quindi si può applicare un criterio di convergenza per gli integrali impropri, in particolare quello del confronto asintotico.
   Visto che, per $t \to 0^+$, $f(t) \simeq \dfrac{1}{\sqrt{2}t^{1/2}}$ e l'integrale improprio <u>di seconda specie</u> $\int_{0^+}^{1} \dfrac{1}{t^{1/2}}dt$ converge (poiché al denominatore della funzione integranda c'è una potenza di t con esponente < 1), anche l'integrale improprio di seconda specie $\int_{0^+}^{1} f(t)\,dt$ converge.
   Inoltre converge per il criterio del confronto asintotico anche $\int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$ poiché, per $t \to +\infty$, risulta $f(t) \simeq \dfrac{1}{t^{3/2}}$ e l'integrale improprio <u>di prima specie</u> $\int_{1}^{+\infty} \dfrac{1}{t^{3/2}}dt$ è convergente in quanto al denominatore della funzione integranda c'è una potenza di t con esponente > 1.
   Dunque $\boxed{\int_{0^+}^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge}}$, poiché entrambi gli integrali di cui è somma convergono.

6. La funzione di due variabili $f(x,y) = x^3 + 7xy - 3y^2$ ha derivate parziali $f_x(x,y) = 3x^2 + 7y$ e $f_y(x,y) = 7x - 6y$. I suoi punti critici sono quelli le cui coordinate annullano il gradiente $\mathbf{grad}\,(f(x,y)) = (f_x(x,y)\,, f_y(x,y))$, cioè le soluzioni del sistema:
   $\begin{cases} 3x^2 + 7y = 0 \\ 7x - 6y = 0 \end{cases}$. Per sostituzione si trova $\begin{cases} y = 7x/6 \\ 18x^2 + 49x = 0 \end{cases}$ che ha soluzioni:
   $(0,0)$ e $\left(-\frac{49}{18}, -\frac{343}{108}\right)$: questi sono i punti critici.
   Tenuto conto che l'hessiano è $H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 7 \\ 7 & -6 \end{vmatrix}$, si vede che
   $H(0,0) = -49$ e quindi $\boxed{(0,0) \text{ è un punto di sella}}$;
   $H\left(-\frac{49}{18}, -\frac{343}{108}\right) = \begin{vmatrix} -\frac{49}{3} & 7 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = 98 - 49 > 0$ e quindi, essendo $f_{yy}\left(-\frac{49}{18}, -\frac{343}{108}\right) = -6 < 0$,
   $\boxed{\left(-\frac{49}{18}, -\frac{343}{108}\right) \text{ è un punto di massimo locale}}$

7. $y' = 3y^2 - 9y + 6$ è un'equazione differenziale del I ordine a variabili separabili che può essere riscritta come $y' = 3\,(y-1)\,(y-2)$, prodotto di una funzione costante in t e di un polinomio in y (entrambe sono palesemente funzioni continue su tutto l'asse reale).

   (a) Quest'equazione ammette due soluzioni costanti: $y\,(t) = 1$ e $y\,(t) = 2$ e l'integrale generale si può ricavare risolvendo l'equazione integrale $\displaystyle\int \frac{dy}{(y-1)\,(y-2)} = \int 3dt.$

   Allo scopo osserviamo che $\dfrac{1}{(y-1)\,(y-2)} = \dfrac{1}{y-2} - \dfrac{1}{y-1}$; dunque integrando:

   $\ln\left|\dfrac{y-2}{y-1}\right| = 3t + k$ (con $k \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow \left|\dfrac{y-2}{y-1}\right| = e^k \cdot e^{3t}$ (con $k \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow \boxed{\dfrac{y-2}{y-1} = ce^{3t}}$ (con $c \in \mathbb{R}$).

   Risolvendo rispetto a y quest'ultima uguaglianza, che tiene conto anche della soluzione $y(t) = 2$, da $y\,(1 - ce^{3t}) = 2 - ce^{3t}$ si ricava l'<u>integrale generale</u> $\boxed{y(t) = \dfrac{2 - ce^{3t}}{1 - ce^{3t}}}$.

   Le funzioni di questo tipo sono soluzioni (cioè sono derivabili e soddisfano l'equazione differenziale) purché il denominatore sia diverso da 0, quindi per ogni t reale se $c < 0$ mentre se $c > 0$ solo per $t \in \left(-\infty, -\frac{\ln c}{3}\right)$ o per $t \in \left(-\frac{\ln c}{3}, +\infty\right)$.

   (b) Perché la funzione soluzione $y(t)$ soddisfi la condizione iniziale $y(0) = 0$, basta che sia $\dfrac{y(0)-2}{y(0)-1} = ce^{3\cdot 0}$ cioè $c = 2$. Quindi la <u>soluzione del problema di Cauchy</u> proposto è la funzione $\boxed{y(t) = 1 - \dfrac{1}{2e^{3t} - 1}}$, il cui dominio, dovendo contenere $t = 0$, è $\left(-\frac{\ln 2}{3}, +\infty\right)$.

8. I tre vettori di $\mathbb{R}^3$: $(k+1, 1, k)$, $(1, 0, -1)$, $(2, k, k-1)$ sono dipendenti se e solo se

$$\begin{vmatrix} k+1 & 1 & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & k & k-1 \end{vmatrix} = 0.$$

   Sviluppando lungo la seconda riga il determinante risulta pari a $-\,(k-1) + k^2 + k\,(k+1) - 2 = 2k^2 - 1$, che si annulla se e solo se $k = \pm 1/\sqrt{2}$: questi due sono i valori di k per cui i tre vettori sono dipendenti.