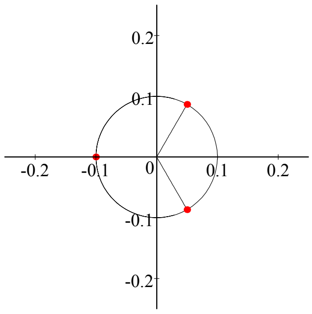
Soluzioni del compito di Istituzioni di Matematiche per Chimica (20/2/07)

1. Il numero complesso -0.001 ha modulo 0.001 ed argomento π. Dunque le sue radici terze



hanno modulo $\sqrt[3]{0.001} = \frac{1}{10}$ e argomenti $\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$, con $k = 0, 1, 2$, cioè sono numeri complessi che stanno sulla circonferenza con centro nell'origine e raggio $\frac{1}{10}$ su raggi che formano con l'asse x gli angoli sopra elencati. Ne segue che hanno la forma $w_k = \frac{1}{10}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right)\right]$, con $k = 0, 1, 2$, cioè, in forma algebrica, $\boxed{w_0 = \frac{1}{20} + i\frac{\sqrt{3}}{20},\ w_1 = -\frac{1}{10},\ w_2 = \frac{1}{20} - i\frac{\sqrt{3}}{20}}$.

2. La funzione $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x$

   (a) è definita purché sia definito il logaritmo, cioè purché $x \in (0, +\infty)$. Inoltre $f(x) = (\ln x)(\ln x - 1) \geq 0$ se e solo se $\ln x \leq 0$ oppure $\ln x \geq 1$ cioè in $(0, 1]$ e in $[e, +\infty)$ e gli zeri sono $x = 1$ ed in $x = e$.

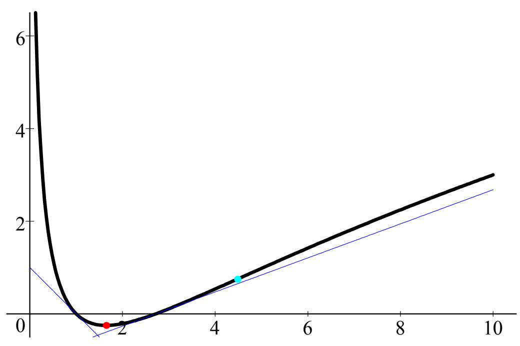
   (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x)(\ln x - 1) = +\infty$ (poiché ciascuno dei due fattori diverge a $-\infty$) e quindi $x = 0$ è asintoto verticale; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)(\ln x - 1) = +\infty$ senza asintoti, poiché $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$.

   (c) Essendo $x \in (0, +\infty)$, $f'(x) = 2\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2\ln x - 1}{x} \geq 0$ se e solo se $2\ln x - 1 \geq 0$, cioè $\ln x \geq \dfrac{1}{2}$, cioè se e solo se $x \in (\sqrt{e}, +\infty)$. Ne segue che la funzione cresce in $(\sqrt{e}, +\infty)$ e decresce in $(0, \sqrt{e})$ e in $x = \sqrt{e}$ ha un punto di minimo relativo. Si ha $f(\sqrt{e}) = -\dfrac{1}{4}$.

   (d) $f''(x) = \dfrac{2x^{-1}\cdot x - (2\ln x - 1)}{x^2} = \dfrac{3 - 2\ln x}{x^2} \geq 0$ se e solo se $x \in (0, +\infty)$ e $2\ln x \leq 3$, cioè se e solo se $x \in \left(0, \sqrt{e^3}\right]$: quindi la funzione è convessa in $\left(0, \sqrt{e^3}\right)$ e concava in $\left(\sqrt{e^3}, +\infty\right)$ e ha un punto di flesso in $x = \sqrt{e^3}$ in cui assume il valore $f\left(\sqrt{e^3}\right) = \dfrac{9}{4} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{4}$.

   (e) Poiché $f'(1) = -1$ e $f'(e) = e^{-1}$, le rette tangenti nei due zeri della funzione hanno rispettivamente equazione: $y = -(x - 1)$ e $y = e^{-1}(x - e)$.

   (f) Grafico di $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x$: evidenziati il minimo, il flesso e le tangenti negli zeri.

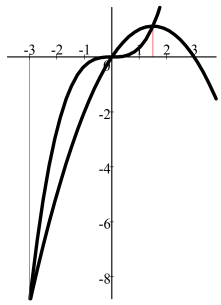


3. $\displaystyle\int 2x \arctan(2x)\, dx = \boxed{\begin{array}{l}\text{per parti con fattor}\\ \text{finito } \arctan(2x)\end{array}} = x^2 \arctan(2x) - \int \frac{2x^2}{1+4x^2} dx =$

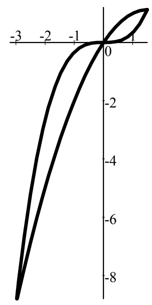
$\displaystyle = x^2 \arctan(2x) - \frac{1}{2}\int \frac{1+4x^2-1}{1+4x^2} dx = x^2 \arctan(2x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\int \frac{2}{1+4x^2} dx =$

$\displaystyle = \boxed{\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) \arctan(2x) - \frac{1}{2}x + c}.$

4. La funzione $f(x) = \dfrac{x^3}{3}$ è dispari, crescente e ha un flesso a tangente orizzontale nell'origine. La funzione $g(x) = \dfrac{1}{2}\left(3x - x^2\right)$ ha per grafico una parabola concava, che interseca l'asse x in $(3,0)$, oltre che nell'origine, avente asse $x = \frac{3}{2}$ e vertice $V = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{8}\right)$



I due grafici si intersecano allorché $2x^3 = 3\left(3x - x^2\right)$, cioè se $x = 0$ (e $y = 0$) oppure $2x^2 + 3x - 9 = 0$, cioè se $x = -3$ (e $y = -9$) o $x = \frac{3}{2}$ (e $y = \frac{9}{8}$). Dal grafico è evidente che la regione limitata R delimitata dai due grafici è composta da due regioni connesse per un punto (l'origine): v. figura a destra.



Poiché nell'intervallo $[-3,0]$ si ha $f(x) \geq g(x)$, mentre nell'intervallo $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ si ha $f(x) \leq g(x)$, l'area di R è $\mathcal{A}(R) =$

$$= \int_{-3}^{0} (f(x) - g(x))\, dx + \int_{0}^{3/2} (g(x) - f(x))\, dx = \frac{1}{6}\left[\int_{-3}^{0} (2x^3 + 3x^2 - 9x)\, dx + \int_{0}^{3/2} (9x - 3x^2 - 2x^3)\, dx\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\left[\frac{x^4}{2} + x^3 - \frac{9x^2}{2}\right]_{-3}^{0} + \left[\frac{9x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2}\right]_{0}^{3/2}\right) = \frac{1}{6}\left(27 + \frac{3\cdot 81}{32} - \frac{27}{8}\right) = \frac{9(32+9-4)}{64} = \boxed{\frac{333}{64}}$$

5. La funzione $f(t) = \dfrac{1 - e^{1-t}}{\sqrt{(t-1)^3}}$

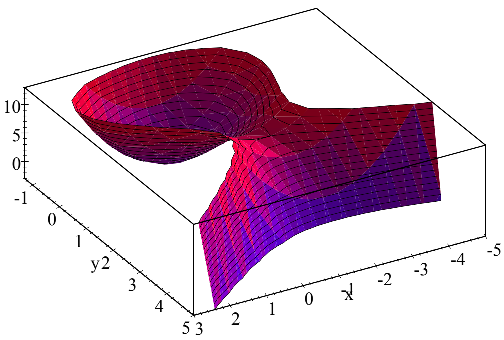
   (a) è definita purché risulti $t - 1 > 0$ (insieme di definizione della potenza razionale negativa) cioè per $t \in (1, +\infty)$. In $(1, +\infty)$ la funzione è continua e sempre positiva, essendo $1 - t < 0$.

   (b) Per $t \to 1^+$, aiutandosi eventualmente con la sostituzione $s = t - 1$ e ricordando che per s che tende a 0 si ha $e^{-s} - 1 \simeq -s$, si vede che $f(t) \simeq \dfrac{t-1}{\sqrt{(t-1)^3}} = \dfrac{1}{(t-1)^{1/2}}$ (in particolare, la funzione diverge: dunque risulta illimitata sul suo insieme di definizione). Per $t \to +\infty$, invece, e^{1-t} tende a zero e quindi risulta $f(t) \simeq \dfrac{1}{t^{3/2}}$ (in particolare, la funzione tende a zero).

   (c) Per l'osservazione appena fatta $\int_{1^+}^{+\infty} f(t)\, dt = \int_{1^+}^{2} f(t)\, dt + \int_{2}^{+\infty} f(t)\, dt$ è un integrale improprio contemporaneamente di prima e di seconda specie.

La funzione $f(t)$ è positiva in $(1,+\infty)$: quindi si può applicare un criterio di convergenza per gli integrali impropri, in particolare quello del confronto asintotico.
Visto che, per $t \to 1^+$, $f(t) \simeq \dfrac{1}{(t-1)^{1/2}}$ e l'integrale improprio <u>di seconda specie</u> $\int_{1^+}^{2} \dfrac{1}{(t-1)^{1/2}} dt$ converge (poiché al denominatore della funzione integranda c'è una potenza di $t-1$ con esponente < 1), anche l'integrale improprio di seconda specie $\int_{1^+}^{2} f(t)\,dt$ converge. Inoltre converge per il criterio del confronto asintotico anche $\int_{2}^{+\infty} f(t)\,dt$ poiché, per $t \to +\infty$, risulta $f(t) \simeq \dfrac{1}{t^{3/2}}$ ed è convergente l'integrale improprio <u>di prima specie</u> $\int_{2}^{+\infty} \dfrac{1}{t^{3/2}} dt$ (poiché al denominatore della funzione integranda c'è una potenza di t con esponente > 1).
Dunque $\boxed{\int_{1^+}^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge}}$, poiché entrambi gli integrali di cui è somma convergono.

6. La funzione di due variabili $f(x,y) = xy^2 - 2y^3 + 2x^2 + 7y^2$ ha derivate parziali
$$f_x(x,y) = y^2 + 4x \quad \text{e} \quad f_y(x,y) = 2xy - 6y^2 + 14y.$$
I suoi punti critici sono quelli le cui coordinate annullano il gradiente **grad** $(f(x,y)) = (f_x(x,y)\,,f_y(x,y))$, cioè le soluzioni del sistema: $\begin{cases} y^2 + 4x = 0 \\ y\,(x - 3y + 7) = 0 \end{cases}$
che equivale ai due sistemi $\begin{cases} y^2 + 4x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} y^2 + 4x = 0 \\ x = 3y - 7 \end{cases}$.
Il primo ha soluzione $(0,0)$; il secondo, che si può riscrivere $\begin{cases} y^2 + 12y - 28 = 0 \\ x = 3y - 7 \end{cases}$, ha due soluzioni: $(-1,2)$ e $(-49,-14)$: questi tre sono i punti critici.
Tenuto conto che l'hessiano è $H(x,y) = \begin{vmatrix} 4 & 2y \\ 2y & 2x - 12y + 14 \end{vmatrix}$, si vede che:
$H(0,0) = 4 \cdot 14 > 0$ e quindi, essendo $f_{xx}(0,0) = 4 > 0$, $\boxed{(0,0) \text{ è un punto di minimo locale}}$;
$H(-1,2) = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -12 \end{vmatrix} = -64 > 0$ e quindi $\boxed{(-1,2) \text{ è un punto di sella}}$;
$H(-49,-14) = 4\begin{vmatrix} 2 & -14 \\ -14 & 42 \end{vmatrix} = -7 \cdot 64 < 0$ e quindi anche $\boxed{(-49,-14) \text{ è un punto di sella}}$



La figura, ottenuta considerando solo la parte di grafico contenuto tra i piani $x = -5$ e $x = 3$, $y = -1.3$ e $y = 5$, $z = 0$ e $z = 13$, mostra il punto di minimo (fondo del bacino) ed il punto di sella $(-1,2)$ (punto di tracimazione della diga, visibile alla congiunzione di due curve di livello)

7. $y' = 6e^{-3t} - 7y$ è un'equazione differenziale del I ordine lineare completa.

   (a) L'equazione omogenea associata $y' = -7y$ ammette, oltre alla soluzione costante: $y(t) = 0$, infinite soluzioni che si ottengono risolvendo l'equazione integrale $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -7 \int dt$, cioè

   $\ln|y| = -7t + k$ (con $k \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow |y| = e^k \cdot e^{-7t}$ (con $k \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow \boxed{y(t) = ce^{-7t}}$ (con $c \in \mathbb{R}$, tenendo conto anche della soluzione costante).

   Per ottenere la soluzione particolare dell'equazione completa si può o utilizzare il metodo di variazione delle costanti oppure, osservando che la parte omogenea dell'equazione è a coefficienti costanti, utilizzare una strategia analoga a quella che si usa per le equazioni differenziali del second'ordine a coefficienti costanti. Ciò significa cercare una soluzione della forma $\overline{y}(t) = he^{-3t}$, la cui derivata è $\overline{y}'(t) = -3he^{-3t}$. Affinché per ogni t reale risulti $-3he^{-3t} = 6e^{-3t} - 7he^{-3t}$ si deve avere $-3h = 6 - 7h$, cioè $h = \frac{3}{2}$.

   Quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale assegnata è $\boxed{y(t) = \frac{3}{2}e^{-3t} + ce^{-7t}}$.

   (b) Perché la funzione soluzione $y(t)$ soddisfi la condizione iniziale $y(0) = 1$, basta che sia $1 = \frac{3}{2}e^0 + ce^0$ cioè $c = -\frac{1}{2}$. Quindi la <u>soluzione del problema di Cauchy</u> proposto è la funzione $\boxed{y(t) = \frac{1}{2}e^{-7t}\left(1 + 3e^{4t}\right)}$.

8. Il coseno dell'angolo convesso formato dai due vettori $\mathbf{u} = (-4, -1, 3)$ e $\mathbf{v} = (1, -3, -4)$ di $\mathbb{R}^3$ è dato da $\dfrac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} = \dfrac{-4 - (-3) + 3\,(-4)}{\sqrt{16+1+9}\sqrt{1+9+16}} = \dfrac{-13}{26} = -\dfrac{1}{2}$.

   Quindi la misura dell'angolo è data da $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \boxed{\dfrac{2\pi}{3}}$.

   Quanto al volume del parallelepipedo avente per spigoli i tre vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, esso è il valore assoluto del prodotto misto di $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$. Risulta

   $$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = (13, -13, 13) \text{ e}$$

   $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w} = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = |\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|^2 = 3(13)^2 = \boxed{507}$: questo è il volume cercato.