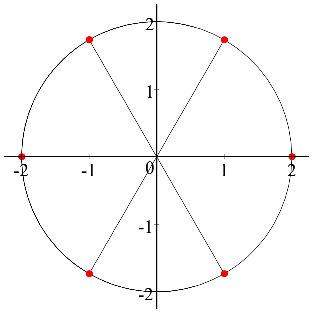
Soluzioni del compito di Istituzioni di Matematiche per Chimica (19/7/07)

1. Cercare le soluzioni complesse dell'equazione $x^6 = 64$ equivale a cercare le radici seste complesse di 64. Ora il numero complesso 64 ha modulo 64 ed argomento 0. Dunque le sue radici seste hanno modulo $\sqrt[6]{64} = 2$ e argomenti $0 + k\frac{2\pi}{6} = k\frac{\pi}{3}$, con $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, cioè sono numeri complessi che stanno sulla circonferenza con centro nell'origine e raggio 2 su raggi che formano con l'asse x gli angoli sopra elencati. Ne segue che le radici seste hanno la forma $w_k = 2\left[\cos\left(k\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(k\frac{\pi}{3}\right)\right]$, con $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, cioè, in forma algebrica,
$\boxed{w_0 = 2 = -w_3,\ w_1 = 1 + \sqrt{3}i = -w_4,\ w_2 = \sqrt{3}i - 1 = -w_5}$.



2. La funzione $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-4}{x^2-3x}\right)$

   (a) è definita purché sia definito il logaritmo, cioè purché sia $\dfrac{x-4}{x^2-3x} > 0$ vale a dire se $x \in (0,3) \cup (4, +\infty)$.
   Inoltre $f(x) \geq 0$ se e solo se $\dfrac{x-4}{x^2-3x} \geq 1 \iff \dfrac{-(x-2)^2}{x^2-3x} \geq 0 \iff x^2 - 3x < 0$ cioè la funzione è non negativa in $(0,3)$ e in particolare c'è un solo zero, in $x = 2$.

   (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln\left(\dfrac{-4}{-3x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln\dfrac{4}{3} - \ln x\right) = +\infty$,
   $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \ln\left(\dfrac{-1}{-3(3-x)}\right) = \lim\limits_{x\to 3^-}\left(\ln\dfrac{1}{3} - \ln(3-x)\right) = +\infty$,
   $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} \ln\left(\dfrac{x-4}{4}\right) = \lim\limits_{x\to 4^+}(\ln(x-4) - \ln 4) = -\infty$ e quindi $x = 0$, $x = 3$, $x = 4$ sono asintoti verticali;
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x-4}{x^2-3x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\dfrac{x}{x^2} = -\infty$ senza asintoti, poiché
   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-(\ln x)}{x} = 0\ .$$

   (c) $f'(x) = \dfrac{x^2-3x}{x-4}\cdot\dfrac{x^2-3x-(x-4)(2x-3)}{(x^2-3x)^2} = \dfrac{-x^2+8x-12}{(x-4)(x^2-3x)} \geq 0$ se e solo se $x \in (2,6) \cap ((0,3)\cup(4,+\infty))$, cioè se e solo se $x \in (2,3)$ oppure $x \in (4,6)$. Ne segue che la funzione cresce in $(2,3)$ e in $(4,6)$ e decresce in $(0,2)$ e in $(6,+\infty)$ e in $x = 2$ ha un punto di minimo relativo mentre in $x = 6$ ha un punto di massimo relativo. Si ha $f(2) = 0$ e $f(6) = -\ln 9$.

   (d) Poiché $f(1) = \ln\dfrac{3}{2}$ e $f'(1) = -\dfrac{5}{6}$, la retta tangente nel punto di ascissa 1 al grafico della funzione ha equazione: $y = \ln\dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{6}(x-1)$.

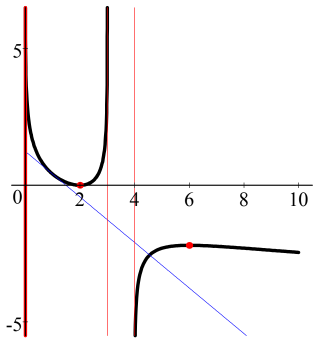
(e) 

Grafico di $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-4}{x^2-3x}\right)$: evidenziati gli asintoti verticali, lo zero (che è anche minimo relativo), il massimo relativo e la tangente nel punto di ascissa 1.

3. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}dx = \boxed{\begin{array}{l}\text{per sostituzione}\\ t=x^2,\ dt=2xdx\end{array}} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2} = \boxed{\frac{1}{2}\arctan\left(x^2\right)+c}.$

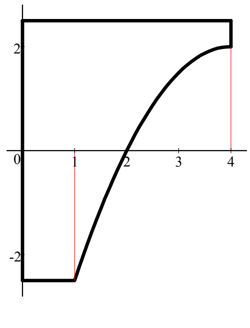
4. La funzione $f(t) = \begin{cases} -\frac{5}{2} & \text{se } 0 \le t \le 1 \\ -\frac{1}{2}t^2+4t-6 & \text{se } 1 < t \le 4 \end{cases}$ è continua nell'intervallo $[0,4]$ poiché è continua in $t=1$, essendo $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\frac{1}{2}+4-6 = -\frac{5}{2} = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, e negli altri punti lo è essendo descritta da un polinomio (di grado 0 ovvero 2). Quindi

(a) $f(t)$ è integrabile in ogni sottointervallo chiuso di $[0,4]$, in particolare in $[0,x]$ con $0 \le x \le 4$. Ciò significa che è definita la funzione integrale $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$

(b) Se $0 \le x \le 1$ risulta $\int\limits_0^x f(t)\,dt = \int\limits_0^x \left(-\frac{5}{2}\right)dt = -\frac{5}{2}x$, mentre se $1 < x \le 4$ risulta $\int\limits_0^x f(t)\,dt = \int\limits_0^1 \left(-\frac{5}{2}\right)dt + \int\limits_1^x \left(-\frac{1}{2}t^2+4t-6\right)dt = -\frac{5}{2} + \left[-\frac{1}{6}x^3+2x^2-6x+\frac{1}{6}-2+6\right]$ cioè

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{5}{2}x & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ -\frac{1}{6}x^3+2x^2-6x+\frac{5}{3} & \text{se } 1 < x \le 4 \end{cases}$$

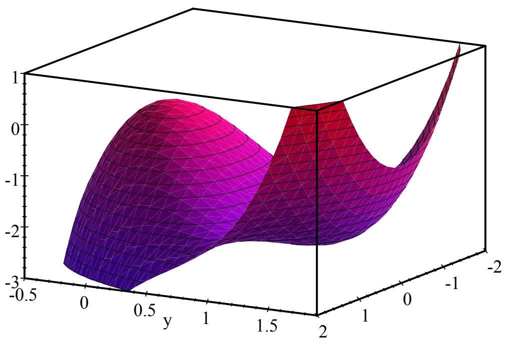
(c) In $[0,1]$ la funzione $f(t) = -\frac{5}{2}$ ha per grafico un segmento parallelo all'asse t. In $[1,4]$ la funzione $f(t) = -\frac{1}{2}\left(t^2-8t+12\right) = \frac{1}{2}(6-t)(t-2)$ ha per grafico un arco di parabola concava, che ha vertice $V=(4,2)$ e interseca l'asse t in $(2,0)$.
Inoltre $f(t) \le 2 < \frac{5}{2}$ in tutto l'intervallo $[0,4]$: quindi la regione di cui si vuol calcolare l'area è quella rappresentata in figura.

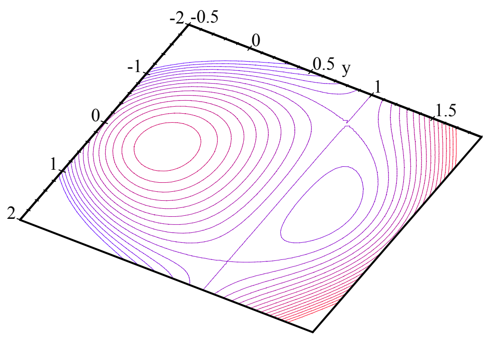


$$\mathcal{A}(R) = \int\limits_0^4 \left(\tfrac{5}{2}-f(t)\right)dt = \left(\int\limits_0^4 \tfrac{5}{2}dt\right) - F(4) =$$
$$= 10 - \left(-\tfrac{1}{6}\cdot 4^3 + 2\cdot 4^2 - 6\cdot 4 + \tfrac{5}{3}\right) = \boxed{11}$$

5. $\int_1^{+\infty} t^{-1}e^{-t}dt$ è un integrale improprio <u>di prima specie</u>, poiché la funzione $f(t) = t^{-1}e^{-t}$ è continua in $[1, +\infty)$ ed in particolare limitata in ogni suo sottointervallo chiuso e limitato. Inoltre tale funzione è positiva in $[1, +\infty)$: quindi si può applicare un criterio di convergenza per gli integrali impropri, ad esempio quello del confronto asintotico generalizzato.
Osserviamo che $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^{-2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} = 0$; quindi, visto che $\int_1^{+\infty} t^{-2}dt = 1$ è convergente, a maggior ragione converge $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$.

6. La funzione di due variabili $f(x,y) = x^2y + 2y^3 - x^2 - 4y^2$ ha derivate parziali
$$f_x(x,y) = 2xy - 2x \quad \text{e} \quad f_y(x,y) = x^2 + 6y^2 - 8y.$$
I suoi punti critici sono quelli le cui coordinate annullano il gradiente $\mathbf{grad}\,(f(x,y)) = (f_x(x,y)\,, f_y(x,y))$, cioè le soluzioni del sistema: $\begin{cases} xy - x = 0 \\ x^2 + 6y^2 - 8y = 0 \end{cases}$
che equivale ai due sistemi $\begin{cases} x = 0 \\ y\,(3y-4) = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} y = 1 \\ x^2 = 2 \end{cases}$.
Il primo ha soluzioni $(0,0)$ e $\left(0, \frac{4}{3}\right)$; il secondo ha soluzioni $\left(\pm\sqrt{2}, 1\right)$: questi quattro sono i punti critici.
Tenuto conto che l'hessiano è $H(x,y) = \begin{vmatrix} 2\,(y-1) & 2x \\ 2x & 12y-8 \end{vmatrix} = 4\,((y-1)\,(6y-4) - x^2)$, si vede che:
$H(0,0) = 4 \cdot 4 > 0$ e quindi, essendo $f_{xx}(0,0) = -2 < 0$, $\boxed{(0,0) \text{ è un punto di massimo locale}}$ e $f(0,0) = 0$;
$H\left(0, \frac{4}{3}\right) = 4\left(\frac{4}{3} - 1\right)(8-4) > 0$ e quindi, essendo $f_{yy}\left(0, \frac{4}{3}\right) = 8 > 0$, $\boxed{\left(0, \frac{4}{3}\right) \text{ è un punto di minimo locale}}$ e $f\left(0, \frac{4}{3}\right) = -\frac{64}{27}$;
$H\left(\pm\sqrt{2}, 1\right) = 4\,(-2) < 0$ e quindi $\boxed{\left(\pm\sqrt{2}, 1\right) \text{ sono punti di sella}}$ e $f\left(\pm\sqrt{2}, 1\right) = -2$.





Le figure sono ottenute considerando solo la parte di grafico contenuto tra i piani $x = -2$ e $x = 2$, $y = -0.5$ e $y = 1.9$, $z = -3$ e $z = 1$. La prima mostra il punto di massimo ed il punto di minimo; la seconda fornisce la proiezione in piano con le curve di livello: punto di massimo e punto di minimo sono in zone delimitate da una curva chiusa; i punti di sella sono all'intersezione di curve di livello: si noti infatti che $f(x,y) = -2$ se e solo se $x^2y + 2y^3 - x^2 - 4y^2 + 2 = 0$, cioè $(y-1)\,(x^2 + 2y^2 - 2y - 2) = 0$ e i due punti di sella sono all'intersezione di $x^2 + 2y^2 - 2y = 2$ e $y = 1$ sul piano di equazione $z = -2$.

7. $y' = \sqrt{t}\,(2-3y)$ è un'equazione differenziale del I ordine lineare completa che può essere convenientemente interpretata come equazione a variabili separabili.

   (a) Essa ammette quindi la soluzione costante $y(t)=\dfrac{2}{3}$ e le infinite soluzioni che si ottengono risolvendo l'equazione integrale $\displaystyle\int \frac{3dy}{3y-2} = -3\int \sqrt{t}dt$, cioè $\ln|3y-2| = -2t\sqrt{t}+k$ (con $k \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow$ $|3y-2| = e^k \cdot e^{-2t\sqrt{t}}$ (con $k \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow$ $\boxed{3y(t)-2 = ce^{2t\sqrt{t}}}$ (con $c \in \mathbb{R}$, tenendo conto anche della soluzione costante).Quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale assegnata è $\boxed{y(t) = \frac{1}{3}\left(ce^{2t\sqrt{t}}+2\right)}$.

   (b) Perché la funzione soluzione $y(t)$ soddisfi la condizione iniziale $y(1) = 0$, basta che sia $\dfrac{1}{3}(ce^2+2) = 0$ cioè $c = -2e^{-2}$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy proposto è la funzione $\boxed{y(t) = \frac{2}{3}\left(1 - e^{2\left(t\sqrt{t}-1\right)}\right)}$.

8. Il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & k-1 & -2 & -1 \\ 3 & -k & k+1 & 2 \\ 9 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ è ≤ 3 poiché la matrice ha tre sole righe e ≥ 2 poiché A contiene la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ che ha determinante $5 \neq 0$. Orlando tale matrice con la terza riga e colonna si ha una sottomatrice il cui determinante (calcolato lungo l'ultima colonna)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & k+1 & 2 \\ 9 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -(12-9-9k) - 2(4+18) + (k+1+6) = -40+10k$$

si annulla solo per $k = 4$. Per tale valore di k anche la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante $-(3+36) - 2(1-27) + (-4-9) = 0$ e quindi, per la regola di Kronecker,
- se $k = 4$ la matrice ha rango 2
- se $k \neq 4$ la matrice ha rango 3.