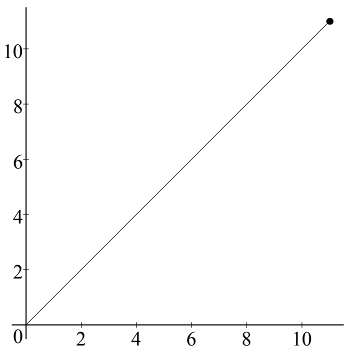
Soluzioni del compito di Istituzioni di Matematiche per Chimica (20/9/07)

1. $w = 11 + 11i$ ha modulo $11\sqrt{2}$ e argomento principale $\dfrac{\pi}{4}$, essendo rappresentato nel piano di Argand Gauss dal punto in figura.



Dunque la sua potenza sesta ha
modulo $\left(11\sqrt{2}\right)^6 = 8 \cdot 11^6$
e argomento $6\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3\pi}{2}$
Ne segue che
$$w^6 = 8 \cdot 11^6 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = -8 \cdot 11^6 i$$

2. La funzione $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{5-x}\right) - \dfrac{x}{3}$

(a) è definita purché sia definita la frazione, cioè purché sia $\boxed{x \neq 5}$.
È evidente che $f(0) = 0$ ma è più conveniente studiare zeri e segno a partire dall'andamento della funzione che cercare di desumerli a priori!

(b) $\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} \arctan\left(\dfrac{5}{5-x}\right) - \dfrac{5}{3} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{5}{3}$, poiché $\lim_{x\to 5^-} (5-x) = 0^+$ e quindi $\lim_{x\to 5^-} \dfrac{5}{5-x} = +\infty$
$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} \arctan\left(\dfrac{5}{5-x}\right) - \dfrac{5}{3} = -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{5}{3}$, per motivi analoghi
$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \arctan(-1) - \dfrac{x}{3} = \mp\infty$ e quindi $f(x)$ ha $\boxed{\text{asintoto obliquo } y = -\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{3}}$ tanto per x che tende a $-\infty$ che per x che tende a $+\infty$.

(c) $f'(x) = \dfrac{1}{1 + \left(\frac{x}{5-x}\right)^2} \cdot \dfrac{5}{(5-x)^2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{(5-x)^2 + x^2} - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{x^2 - 5x + 5}{(5-x)^2 + x^2} \geq 0$, se e solo se $x \in \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) \cap ((-\infty, 5) \cup (5, +\infty))$. Ne segue che la funzione <u>cresce in</u> $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$ e decresce in $\left(-\infty, \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$, in $\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}, 5\right)$ e in $(5, +\infty)$ e in $x = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ ha un punto di <u>minimo relativo</u> mentre in $x = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ ha un punto di <u>massimo relativo</u>. Si ha
$f\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) = \arctan\left(\frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\right) - \frac{5-\sqrt{5}}{6} = \arctan\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{5-\sqrt{5}}{6} \approx -9.5792 \times 10^{-2}$ e
$f\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) = \arctan\left(\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right) - \frac{5+\sqrt{5}}{6} = \arctan\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{5+\sqrt{5}}{6} \approx -7.8831 \times 10^{-5}$

(d) Nell'intervallo $(5, +\infty)$ la funzione è <u>negativa</u> poiché è decrescente e $\lim_{x\to 5^+} f(x) = -\frac{\pi}{2} - \frac{5}{3}$ è negativo
Nell'intervallo $(0, 5)$ la funzione è <u>negativa</u> poiché il massimo $f\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$ relativo a tale intervallo è negativo
Nell'intervallo $(-\infty, 0)$ la funzione è <u>positiva</u> poiché è decrescente e $f(0) = 0$.

(e) Poiché $f(0) = 0$ e $f'(0) = -\dfrac{2}{15}$, la retta tangente nel punto di ascissa 0 al grafico della funzione ha equazione: $\boxed{y = -\dfrac{2}{15}x}$.

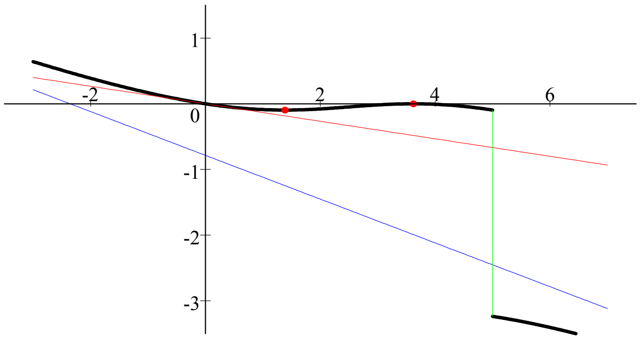
(f) 

Grafico di $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{5-x}\right) - \dfrac{x}{3}$: evidenziati l'asintoto obliquo, il minimo relativo), il massimo relativo e la tangente nel punto di ascissa 0.

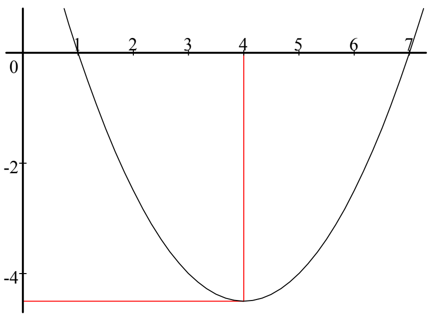
3. $\displaystyle\int x\ln(1-2x)\,dx = \boxed{\begin{array}{l}\text{per parti}\\ xdx \text{ fatt. diff.}\end{array}} = \frac{x^2}{2}\ln(1-2x) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{-2}{1-2x}dx =$

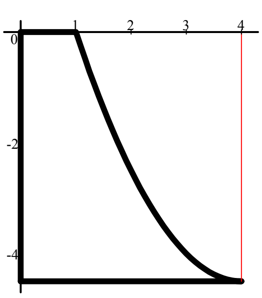
$\displaystyle = \frac{x^2}{2}\ln(1-2x) - \int \frac{x^2}{2x-1}dx = \frac{x^2}{2}\ln(1-2x) - \frac{1}{4}\int\frac{4x^2-1+1}{2x-1}dx =$

$\displaystyle = \frac{x^2}{2}\ln(1-2x) - \frac{1}{4}\int(2x+1)\,dx - \frac{1}{8}\int\frac{2dx}{2x-1} = \frac{x^2}{2}\ln(1-2x) - \frac{1}{4}(x^2+x) - \frac{1}{8}\ln|2x-1| + c =$

$\displaystyle = \boxed{\frac{4x^2-1}{8}\ln(1-2x) - \frac{1}{4}(x^2+x) + c}$.

4. La funzione $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-7)$ ha per grafico un arco di parabola convessa, che interseca l'asse x in $(1,0)$ e in $(7,0)$ e ha vertice $V = \left(4, -\frac{9}{2}\right)$. Quindi la retta di equazione $y = -\frac{9}{2}$ è esattamente la tangente a tale grafico nel vertice della parabola: ne consegue che la regione R di cui si vuol calcolare l'area è quella evidenziata in tratto spesso nella seconda figura e la sua area può essere trovata come differenza tra l'area del rettangolo i cui lati misurano 4 e $\frac{9}{2}$ e l'area compresa tra l'asse x e la parabola nell'intervallo $[1,4]$:





$$\mathcal{A}(R) = 18 - \int_1^4 0 - \tfrac{1}{2}(x-7)(x-1)\,dx = 18 + \int_1^4 \left(\tfrac{1}{2}x^2 - 4x + \tfrac{7}{2}\right)dx =$$

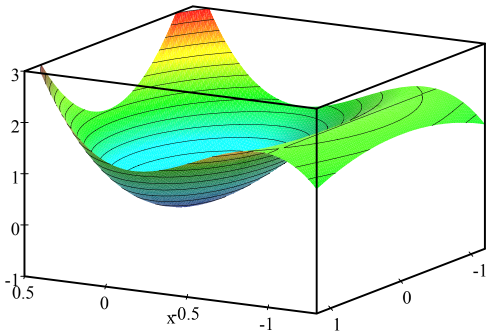
$$= 18 + \left[\tfrac{1}{6}x^3 - 2x^2 + \tfrac{7}{2}x\right]_1^4 = 18 + \tfrac{32}{3} - 32 + 14 - \tfrac{1}{6} + 2 - \tfrac{7}{2} = \boxed{9}$$

5. La funzione $f(t) = \dfrac{t}{e^t - t}$

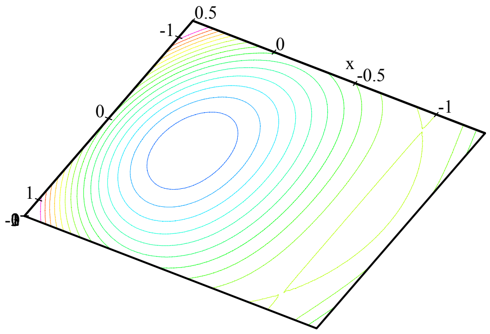
   (a) è definita purché risulti $e^t \neq t$ cioè sempre. Infatti, essendo e^t una funzione convessa, il suo grafico giace al di sopra di ogni retta ad esso tangente, in particolare al di sopra di $y = t + 1$ e quindi $e^t \geq t + 1 > t$ per ogni valore di t.
   Per $t \to +\infty$, la funzione è asintotica a $\dfrac{t}{e^t}$.

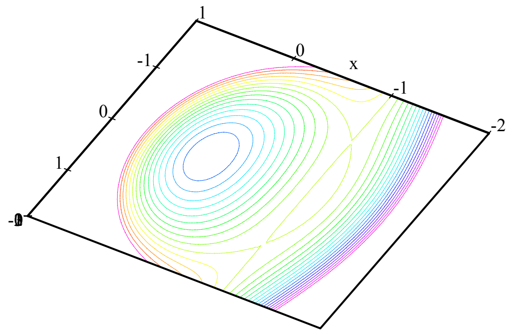
   (b) essendo la funzione $f(t)$ definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, l'integrale $\int\limits_0^{+\infty} f(t)\,dt$ è improprio di prima specie.
   La funzione $f(t)$ è positiva in $(0, +\infty)$: quindi si può applicare un criterio di convergenza per gli integrali impropri, in particolare quello del confronto asintotico.
   L'integrale improprio di prima specie $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{t}{e^t} dt$ è convergente (per vederlo o si applica il criterio del confronto generalizzato o ... si fanno i conti: $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{t}{e^t} dt = \lim\limits_{x \to +\infty} \int\limits_0^{x} te^{-t} dt = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[-(t+1)\,e^{-t}\right]_0^x = 1$).
   Dunque $\boxed{\int\limits_0^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge}}$.

6. La funzione di due variabili $f(x, y) = 3x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ ha derivate parziali
$$f_x(x, y) = 9x^2 + y^2 + 10x \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = 2xy + 2y.$$
   I suoi punti critici sono quelli le cui coordinate annullano il gradiente
   $\mathbf{grad}\,(f(x, y)) = (f_x(x, y)\,, f_y(x, y))$, cioè le soluzioni del sistema: $\begin{cases} xy + y = 0 \\ 9x^2 + y^2 + 10x = 0 \end{cases}$
   che equivale ai due sistemi $\begin{cases} y = 0 \\ x\,(9x + 10) = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = -1 \\ y^2 = 1 \end{cases}$.
   Il primo ha soluzioni $(0, 0)$ e $\left(-\frac{10}{9}, 0\right)$; il secondo ha soluzioni $(-1, \pm 1)$: questi quattro sono i punti critici.
   Tenuto conto che l'hessiano è $H(x, y) = \begin{vmatrix} 2\,(9x + 5) & 2y \\ 2y & 2\,(x + 1) \end{vmatrix} = 4\left((x + 1)\,(9x + 5) - 4y^2\right)$, si vede che:
   $H(0, 0) = 4 \cdot 5 > 0$ e quindi, essendo $f_{xx}(0, 0) = 10 > 0$,
   $\boxed{(0, 0) \text{ è un punto di minimo locale}}$ e $f(0, 0) = 0$;
   $H\left(-\frac{10}{9}, 0\right) = 4\left(-\frac{10}{9} + 1\right)(-10 + 5) > 0$ e quindi, essendo $f_{xx}\left(-\frac{10}{9}, 0\right) = -10 < 0$,
   $\boxed{\left(\frac{10}{9}, 0\right) \text{ è un punto di massimo locale}}$ e $f\left(-\frac{10}{9}, 0\right) = \frac{500}{243}$;
   $H(-1, \pm 1) = 4\,(-4) < 0$ e quindi $\boxed{(-1, \pm 1) \text{ sono punti di sella}}$
   e $f(-1, \pm 1) = -3 - 1 + 5 + 1 = 2$



Le prime 2 figure sono ottenute considerando solo la parte di grafico contenuto tra i piani $x = -1.3$ e $x = 0.5$, $y = -1.2$ e $y = 1.9$, $z = 3$ e $z = -1$.
La prima mostra il punto di massimo ed il punto di minimo; la seconda fornisce la proiezione sul piano xy con le curve di livello (punto di massimo e punto di minimo sono in zone delimitate da una curva chiusa; i punti di sella sono all'intersezione di curve di livello). La terza mostra la proiezione sul piano xy ma in un dominio più ampio.





7. $y' + 5y = 2y^2$ è un'equazione differenziale del I ordine non lineare ma a variabili separabili: $y' = y\,(2y-5)$.

   (a) Essa ammette le soluzioni costanti $y(t) = 0$ e $y(t) = \dfrac{5}{2}$ e le infinite soluzioni che si ottengono risolvendo l'equazione integrale $\displaystyle\int \frac{dy}{y\,(2y-5)} = \int dt$.
   Poiché $\dfrac{5}{y\,(2y-5)} = \dfrac{2}{2y-5} - \dfrac{1}{y}$, si trova
   $$\int \frac{dy}{y\,(2y-5)} = \int \left(\frac{2}{2y-5} - \frac{1}{y}\right) dy = \ln|2y-5| - \ln|y| + c = \ln\left|\frac{2y-5}{y}\right| + C \text{ (con } C \in \mathbb{R}).$$
   Dunque le soluzioni hanno la forma $\dfrac{1}{5}\ln\left|\dfrac{2y-5}{y}\right| = t + k$ cioè $\left|\dfrac{2y-5}{y}\right| = e^{5k} \cdot e^{5t}$ (con $k \in \mathbb{R}$) cioè $\dfrac{2y-5}{y} = ce^{5t}$ (con $c \in \mathbb{R}$, tenendo conto anche della soluzione costante e non nulla). Risolvendo rispetto a y, si trova l'integrale generale dell'equazione differenziale assegnata: $\boxed{y(t) = \dfrac{5}{2 - ce^{5t}}}$.

   (b) Perché la funzione soluzione $y(t)$ soddisfi la condizione iniziale $y(0) = 0$ bisogna però considerare l'unica soluzione non rappresentata dall'integrale generale, cioè la soluzione del problema di Cauchy proposto è la funzione $\boxed{y(t) = 0}$.

8. Un vettore non nullo ortogonale ai due vettori $\mathbf{u} = (1, 7, -2)$ e $\mathbf{v} = (3, -5, 1)$ di $\mathbb{R}^3$ è dato da $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$. Risulta
   $$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = (7-10, -1-6, -5-21) = \boxed{(-3, -7, -26)}\,.$$