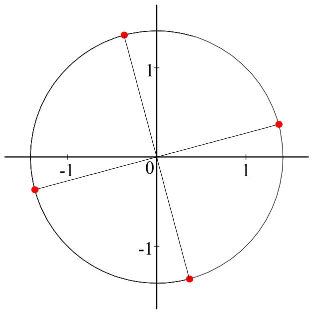
Soluzioni del compito di Istituzioni di Matematiche per Chimica (25/1/08)

1. Il numero complesso $z = 2 + 2\sqrt{3}i$ ha modulo $|z| = \sqrt{4 + 4 \cdot 3} = 4$ e argomento $\arg z = \dfrac{\pi}{3}$ (essendo $\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ il suo coseno ed essendo $\operatorname{Re} z > 0$ e $\operatorname{Im} z > 0$). Dunque le sue radici quarte hanno modulo $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ e argomento $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{2}$, con $k \in \{-2, -1, 0, 1\}$, cioè, al variare di $k \in \{-2, -1, 0, 1\}$, hanno la forma trigonometrica:



$$w_k = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Osservando che $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$, si ricava che

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

e quindi

$$\boxed{w_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2} i = -w_{-2}} \qquad \text{e} \qquad \boxed{w_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} i = -w_{-1}}.$$

2. La funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x + 1}$

   (a) è definita in $[0, +\infty)$ poiché questo è l'insieme di definizione della radice e d'altra parte in questo intervallo il denominatore non si annulla mai (essendo sempre > 1) . Essa si annulla per $x = 1$ ed è positiva in $(1, +\infty)$ e negativa in $[0, 1)$.

   (b) Visto che $f(0) = -1$ e la funzione è continua da destra in $x = 0$, basta calcolare il limite: $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$; quindi per $x \to +\infty$ c'è un $\boxed{\text{asintoto orizzontale: } y = 0}$.

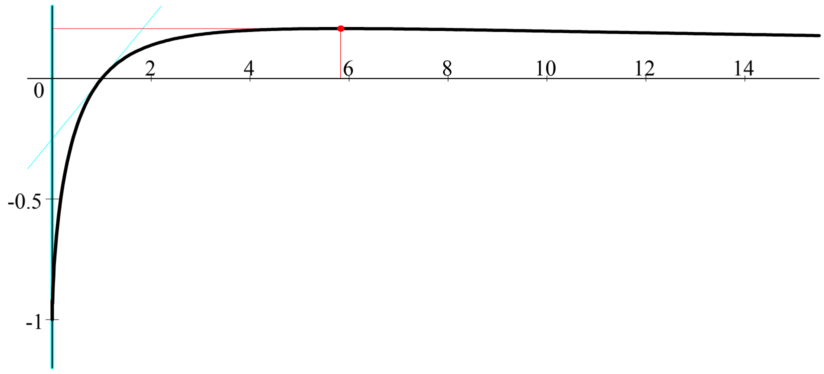
   (c) $$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x + 1) - (\sqrt{x} - 1)}{(x + 1)^2} = \frac{(x + 1) - 2\sqrt{x}\,(\sqrt{x} - 1)}{2\sqrt{x}\,(x + 1)^2} = \frac{-x + 2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}\,(x + 1)^2} \geq 0 \iff$$
   $$\begin{cases} x \in (0, +\infty) \\ x - 2\sqrt{x} - 1 \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (0, +\infty) \\ 1 - \sqrt{2} \leq \sqrt{x} \leq 1 + \sqrt{2} \end{cases}, \text{ cioè se e solo se } x \in \left(0, \left(1 + \sqrt{2}\right)^2\right)$$

   Ne segue che la funzione cresce in $\left(0, 3 + 2\sqrt{2}\right)$, decresce in $\left(3 + 2\sqrt{2}, +\infty\right)$ e in $x = 3 + 2\sqrt{2}$ ha un punto di massimo relativo (e assoluto).

   Si ha $f\left(3 + 2\sqrt{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}$.

   (d) Nel punto di ascissa 0 la derivata prima non è definita, ma $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$. Dunque la retta tangente al grafico nel punto $(0, -1)$ ha equazione $x = 0$. Invece si ha $f(x) = 0$ per $x = 1$ e $f'(1) = \frac{1}{4}$, l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa 0 è $y = \frac{1}{4}(x - 1)$.

   (e) Nel sottostante grafico di $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x + 1}$, che ha differente unità di misura sui due assi, sono evidenziate le tangenti ed il punto di massimo relativo. Non è del tutto evidente dal disegno, ma il grafico presenta un punto di flesso: infatti la funzione è sicuramente concava in un intorno del massimo relativo, mentre per x abbastanza grande deve essere convessa, se deve avere come asintoto per $x \to +\infty$ l'asse x.



3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} = \boxed{\begin{array}{l}\text{per sostituzione: } \sqrt{1-x}=s,\\ 1-x=s^2,\ x=1-s^2,\ dx=-2sds\end{array}} = \int \frac{2ds}{s^2-1} = \int \left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}\right) ds =$

$$= \ln\left|\frac{s-1}{s+1}\right| + c = \ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right| + c$$

4. La funzione $f(x) = \dfrac{4(4-\pi)}{\pi(4-x)} - \dfrac{4}{\pi} + \dfrac{1}{2}$, ha per grafico un arco di iperbole equilatera con asintoti (verticale) $x = 4$ e (orizzontale) $y = -\dfrac{4}{\pi} + \dfrac{1}{2}$, crescente sul dominio $\left[0, \dfrac{7\pi}{6}\right]$, che interseca l'asse x in $x = \dfrac{4\pi}{8-\pi} > \dfrac{2\pi}{3}$.

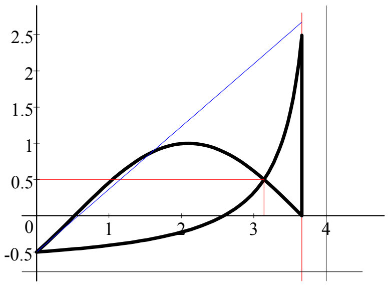
Inoltre, essendo $f(0) = \dfrac{4-\pi}{\pi} - \dfrac{4}{\pi} + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$, e $f\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) = \dfrac{24(4-\pi)}{\pi(24-7\pi)} - \dfrac{4}{\pi} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{24-7\pi}$, il grafico di $f(x)$ interseca l'asse y in $P \equiv \left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$ e la retta di equazione $x = \dfrac{7\pi}{6}$ in $Q_1 \equiv \left(\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{24-7\pi}\right)$.

La funzione $g(x) = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ ha per grafico un arco di sinusoide, traslata di $\dfrac{\pi}{6}$ nella direzione e verso dell'asse x: essendo $g(0) = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$ e $g\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) = \sin\pi = 0$ il grafico di $g(x)$ interseca l'asse y nel punto P e la retta di equazione $x = \dfrac{7\pi}{6}$ in $Q_2 \equiv \left(\dfrac{7\pi}{6}, 0\right)$.

Inoltre nel dominio $\left[0, \dfrac{7\pi}{6}\right]$ si ha $g(\pi) = \sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2} = f(\pi)$, cioè i due grafici hanno due punti di intersezione: P e $S \equiv \left(\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{1}{2}\right)$ e non ne hanno altri. Infatti:

- nell'intervallo $\left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{7\pi}{6}\right]$ cresce $f(x)$ mentre $g(x)$ decresce e quindi non ci possono punti comuni diversi da S;
- nell'intervallo $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$ risulta $g(x) \geq 0 > f(x)$ e quindi non ci possono essere punti comuni;
- nell'intervallo $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$ entrambe le funzioni crescono e sono negative ma $g(x)$ è convessa e

quindi il grafico giace *sopra* la retta r di equazione $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}$ ad esso *tangente* [1] in $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$; r risulta essere *secante* in P (ed in un altro punto che è inutile determinare in quando esterno all'intervallo $\left[0, \frac{7\pi}{6}\right]$) il grafico di $f(x)$ che giacerà *sotto* r poiché anche $f(x)$ è convessa: cioè $g(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2} \geq f(x)$ e le uguaglianze si realizzano solo in P.



Concludendo si ha $f(x) \leq g(x)$ allorché $x \in [0, \pi]$ e $f(x) \geq g(x)$ allorché $x \in \left[\pi, \frac{7\pi}{6}\right]$.

Dunque la regione R da prendere in esame è quella delimitata in figura dalla linea più spessa, la cui area è data da

$$\mathcal{A}(R) = \int_0^{\pi} (g(x) - f(x))\,dx + \int_{\pi}^{7\pi/6} (f(x) - g(x))\,dx.$$

Si deve dunque calcolare l'integrale indefinito

$$\int \left[\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \left(\frac{4(4-\pi)}{\pi(4-x)} - \frac{4}{\pi} + \frac{1}{2}\right)\right] dx = -\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{4(4-\pi)}{\pi} \ln|x-4| + \left(\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}\right) x + c$$

e il suo opposto e risulta

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(R) = &\left[-\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{4(4-\pi)}{\pi} \ln|x-4| + \left(\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}\right) x\right]_0^{\pi} + \\
&+ \left[\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{4(\pi-4)}{\pi} \ln|x-4| + \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi}\right) x\right]_{\pi}^{7\pi/6} = \\
= 2 &\left[-\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \frac{4(4-\pi)}{\pi} \ln|\pi - 4| + 4 - \frac{\pi}{2}\right] + \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) - \frac{4(4-\pi)}{\pi} \ln 4 + \\
&+ \left[\cos(\pi) + \frac{4(\pi-4)}{\pi} \ln\left|\frac{7\pi}{6} - 4\right| + \frac{7\pi}{12} - \frac{14}{3}\right] = \\
= \sqrt{3} &+ \frac{4(4-\pi)}{\pi} \ln(\pi-4)^2 + 8 - \pi + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{4(\pi-4)}{\pi} \ln\left(4\left|\frac{7\pi}{6} - 4\right|\right) + \frac{7\pi}{12} - \frac{14}{3} = \\
= \frac{7}{3} &+ \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{12} + \frac{4(4-\pi)}{\pi} \ln\left(\frac{3(\pi-4)^2}{48 - 14\pi}\right) \approx 2.9694.
\end{aligned}$$

5. La funzione $f(t) = e^{-t} \ln(1 + 2e^t)$ è definita su tutto l'asse reale (in quanto $1 + 2e^t > 1 > 0$) ove è anche sempre continua e positiva.

   (a) Per $t \to -\infty$, $2e^t$ tende a 0 e quindi $\ln(1 + 2e^t) \simeq 2e^t$. Ne segue che $\boxed{f(t) \simeq e^{-t} \cdot 2e^t = 2}$;

   per $t \to +\infty$, $\ln(1 + 2e^t) \simeq \ln(2e^t) \simeq \ln 2 + t$. Ne segue che $\boxed{f(t) \simeq \frac{\ln 2 + t}{e^t}}$ (e quindi la funzione tende a zero).

   (b) Per le osservazioni appena fatte $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ è un integrale improprio di prima specie, mentre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ è somma di due integrali di prima specie.

---

[1] Osserviamo che $g'(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

La funzione $f(t)$ è positiva in $(0,+\infty)$: quindi si può applicare un criterio di convergenza per gli integrali impropri, in particolare quello del confronto asintotico.

Osserviamo che $f(t) \simeq \dfrac{\ln 2 + t}{e^t}$ per $t \to +\infty$ e l'integrale improprio di prima specie

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln 2 + t}{e^t} dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x (e^{-t}\ln 2 + te^{-t})\, dt = \lim_{x\to+\infty} (-e^{-x}\ln 2 - xe^{-x} - e^{-x} + \ln 2 + 1) = \ln 2 + 1$$

converge: quindi anche l'integrale improprio di prima specie $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ <u>converge</u>.

Invece per $t \to -\infty$ la funzione $f(t)$ tende a 2 (e non a 0) e quindi l'integrale improprio di prima specie $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$ diverge e di conseguenza $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ <u>diverge</u> in quanto somma di un integrale divergente e di uno convergente.

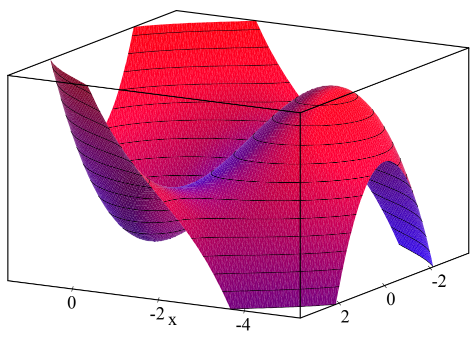
6. La funzione di due variabili $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}xy^2 + 2x^2 + y^2$ ha derivate parziali $f_x(x,y) = x^2 + 4x + \frac{1}{2}y^2$ e $f_y(x,y) = xy + 2y$. I suoi punti critici sono quelli le cui coordinate annullano il gradiente $\mathbf{grad}\,(f(x,y)) = (f_x(x,y)\,,f_y(x,y))$, cioè le soluzioni del sistema: $\begin{cases} x^2 + 4x + \frac{1}{2}y^2 = 0 \\ (x+2)\,y = 0 \end{cases}$ che si scompone nei due sistemi $\begin{cases} x\,(x+4) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} -4 + \frac{1}{2}y^2 = 0 \\ x = -2 \end{cases}$ che hanno soluzioni: $(0,0)$, $(-4,0)$, $\left(-2, \pm 2\sqrt{2}\right)$: questi sono i punti critici.

Tenuto conto che l'hessiano è $H(x,y) = \begin{vmatrix} 2x+4 & y \\ y & x+2 \end{vmatrix}$, si vede che:

$H(0,0) = 8$ ed, essendo $f_{xx}(0,0) = 4 > 0$, $\boxed{(0,0) \text{ è un punto di minimo locale}}$;

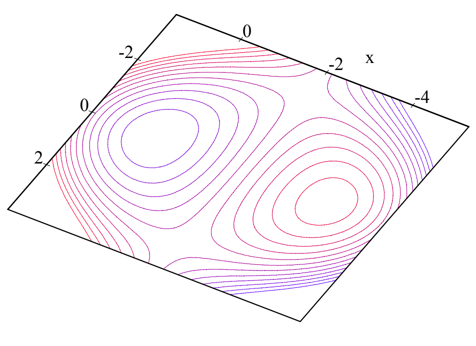
$H(-4,0) = 2\cdot(-2)^2$ ed, essendo $f_{xx}(-4,0) = -4 < 0$, $\boxed{(-4,0) \text{ è un punto di massimo locale}}$;

$H\left(-2,\pm 2\sqrt{2}\right) = \begin{vmatrix} 0 & \pm 2\sqrt{2} \\ \pm 2\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = -8 < 0$ e quindi $\boxed{\left(-2,\pm 2\sqrt{2}\right) \text{ è un punto di sella}}$



Le 2 figure sono ottenute considerando solo la parte di grafico contenuto tra i piani $x = -5.3$ e $x = 1.5$, $y = -3.7$ e $y = 3.7$, $z = -1$ e $z = 11.5$.

La prima mostra il massimo (punto: $\left(-4, 0, \frac{32}{3}\right)$) ed il minimo (punto: $(0,0,0)$) e una delle due selle (punto: $\left(-2, 2\sqrt{2}, \frac{16}{3}\right)$);



la seconda fornisce la proiezione in piano con le curve di livello: punto di massimo e punto di minimo sono al centro di due zone delimitate da curve chiuse; i punti di sella stanno dove le curve di livello si aprono "a stella". Se le curve fossero più fitte tra esse si vedrebbe una retta, proiezione della $\left\{x = -2, z = \frac{16}{3}\right\}$, che passa per i punti di sella.

7. $y' = 2y^2 - \dfrac{3}{2}y + \dfrac{1}{4}$ è un'equazione differenziale del I ordine a variabili separabili che può essere riscritta come $y' = 2\left(y - \dfrac{1}{2}\right)\left(y - \dfrac{1}{4}\right)$, prodotto di una funzione costante in t e di un polinomio in y (entrambe sono palesemente funzioni continue su tutto l'asse reale).

   (a) Quest'equazione ammette due soluzioni costanti: $y(t) = \dfrac{1}{2}$ e $y(t) = \dfrac{1}{4}$ e l'integrale generale si può ricavare risolvendo l'equazione integrale $\displaystyle\int \frac{dy}{\left(y - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{4}\right)} = \int 2dt.$

   Risulta $\dfrac{1}{\left(y - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{4}\right)} = 4\left(\dfrac{1}{y - \frac{1}{2}} - \dfrac{1}{y - \frac{1}{4}}\right)$ e quindi, integrando:

   $$4\ln\left|\frac{y - \frac{1}{2}}{y - \frac{1}{4}}\right| = 2t + k \text{ (con } k \in \mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{y - \frac{1}{2}}{y - \frac{1}{4}}\right| = e^K \cdot e^{t/2} \text{ (con } K = \frac{k}{2} \in \mathbb{R})$$

   $$\Leftrightarrow \quad \frac{y - \frac{1}{2}}{y - \frac{1}{4}} = ce^{t/2} \text{ (con } c \in \mathbb{R}).$$

   Risolvendo rispetto a y quest'ultima uguaglianza, che tiene conto anche della soluzione $y(t) = \dfrac{1}{2}$, da $y\left(1 - ce^{t/2}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}ce^{t/2}$ si ricava l'<u>integrale generale</u> $\boxed{y(t) = \dfrac{2 - ce^{t/2}}{4\left(1 - ce^{t/2}\right)}}$.

   Le funzioni di questo tipo sono soluzioni (cioè sono derivabili e soddisfano l'equazione differenziale) purché il denominatore sia diverso da 0, quindi per ogni t reale se $c < 0$ mentre se $c > 0$ solo per $t \in (-\infty, -2\ln c)$ o per $t \in (-2\ln c, +\infty)$.

   (b) Perché la funzione soluzione $y(t)$ soddisfi la condizione iniziale $y(0) = 0$, basta che sia $\dfrac{y(0) - \frac{1}{2}}{y(0) - \frac{1}{4}} = ce^{0/2}$ cioè $c = 2$. Quindi la <u>soluzione del problema di Cauchy</u> proposto è la funzione $\boxed{y(t) = \dfrac{1 - e^{t/2}}{2\left(1 - 2e^{t/2}\right)}}$, il cui dominio, dovendo contenere $t = 0$, è $(-2\ln 2, +\infty)$.

8. Un vettore contemporaneamente ortogonale ai due vettori di $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{u} = (3, 1, 2)$ e $\mathbf{v} = (1, 0, -1)$ è il loro prodotto vettoriale

   $$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 5, -1).$$

   In generale un vettore che sia contemporaneamente ortogonale ad $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ ha dunque la forma $h(-1, 5, -1)$, con h reale qualunque. Tra questi vettori, che hanno modulo $|h|\sqrt{1 + 25 + 1}$, quelli di modulo 1 sono i vettori tali che $|h| = 1/\sqrt{27}$, cioè $h = \pm 1/3\sqrt{3}$. Dunque i vettori cercati sono $\boxed{\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{-5}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)}$ e $\boxed{\left(\frac{-1}{3\sqrt{3}}, \frac{5}{3\sqrt{3}}, \frac{-1}{3\sqrt{3}}\right)}$.