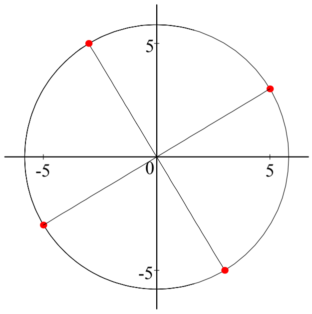
Soluzioni del compito di Istituzioni di Matematiche per Chimica (14/2/08)

1. Se il numero complesso $z = -3 + 5i$ è una radice quarta di un numero w, ogni altra radice z_k



di w ha modulo $|z_k| = \sqrt{9 + 25}$ e argomenti che si ottengono da quello di z aggiungendo multipli di $\frac{\pi}{2}$. Ricordando il significato del prodotto per un numero complesso di modulo 1, si vede che le radici quarte di w hanno la forma trigonometrica:
$z_k = z \cdot \left(\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right)$ con $k = 0, 1, 2, 3,$
cioè $z_0 = -3 + 5i$ e $z_2 = -z_0 = 3 - 5i$
$z_1 = (-3 + 5i)(0 + i) = -5 - 3i$ e $z_3 = -z_1 = 5 + 3i$

2. La funzione $f(x) = e^x(x - 1) + e^{-1}x$

   (a) è definita su tutto l'asse reale.
   Per $x \to +\infty$ si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(x - 1 + \frac{x}{e^{x+1}}\right) = \lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$, senza asintoti visto che l'ordine di infinito è quello di xe^x.
   Per $x \to -\infty$ si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{e^{-x}} + e^{-1}x\right) = \lim_{x\to-\infty}(e^{-1}x) = -\infty$, con asintoto obliquo $y = e^{-1}x$ visto che $\frac{x-1}{e^{-x}}$ tende a zero.

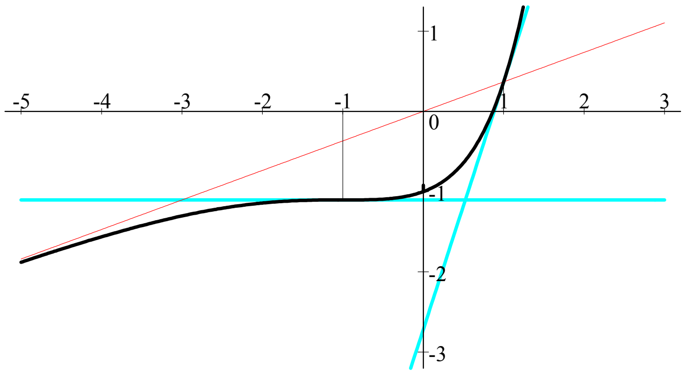
   (b) $f'(x) = e^x(1 + x - 1) + e^{-1} = xe^x + e^{-1}$; $f''(x) = e^x(x + 1)$; $f'''(x) = e^x(x + 2)$.
   Quindi il polinomio di Taylor con punto iniziale $x = -1$ arrestato al terzo ordine è:
   $P(x) = -3e^{-1} + 0(x + 1) + \frac{0}{2}(x + 1)^2 + \frac{e^{-1}}{3!}(x + 1)^3 = -3e^{-1} + \frac{e^{-1}}{3!}(x + 1)^3$.

   (c) $f'(x) \geq 0 \iff x \geq -e^{-1-x}$. Ora la funzione $-e^{-1-x} = -e^{-(1+x)}$ è la traslata di un'unità verso sinistra nella direzione dell'asse x della funzione $-e^{-x}$ che è crescente e concava e ha retta tangente nel punto di ascissa $x = 0$ di equazione $y = -1 + x$: quindi $-e^{-(1+x)}$ avrà retta tangente nel punto di ascissa $x = -1$ di equazione $y = -1 + (x + 1)$ cioè $y = x$. Poiché la funzione è concava, il suo grafico giace sempre al di sotto di tale tangente, cioè risulterà sempre $x \geq -e^{-1-x}$ e il segno $=$ si realizzerà in corrispondenza al punto $x = -1$. Come già visto calcolando il polinomio di Taylor, tale punto non può essere un estremante poiché la prima derivata non nulla è di ordine dispari: la funzione è quindi sempre crescente.

   (d) Sempre dal calcolo fatto per il polinomio di Taylor si vede invece che la funzione presenta in $x = -1$ un punto di flesso a tangente orizzontale $y = -3e^{-1}$ e, visto che $f''(x) = e^x(x + 1) \geq 0$ per $x \geq -1$, la funzione risulta convessa in $(-1, +\infty)$ e concava in $(-\infty, -1)$.

   (e) Si ha $f(1) = e^{-1}$ (per cui il punto del grafico di ascissa 1 appartiene all'asintoto) e $f'(1) = e + e^{-1}$; quindi l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa 1 è $y = e^{-1} + (e + e^{-1})(x - 1)$.
   Nel sottostante grafico di $f(x) = e^x(x - 1) + e^{-1}x$, sono evidenziate la tangente di cui è richiesta l'equazione e quella nel punto di flesso. Si nota che la tangente in $(1, e^{-1})$ approssima sufficientemente bene il grafico da poter affermare che lo zero α della funzione è sufficientemente vicino al punto $x_0 = \frac{1}{1+e^{-2}}$ in cui la tangente taglia l'asse x e, visto che

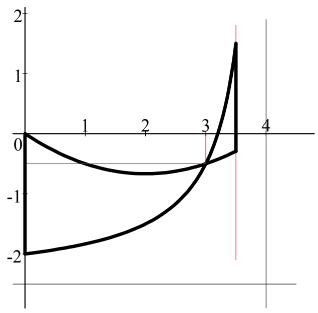
la funzione è monotona crescente, essa sarà positiva per $x > \alpha$ e negativa per $x < \alpha$.



3. $\int \ln(1-2x) = \boxed{\text{per parti con fattor finito, } \ln(1-2x)} = x\ln(1-2x) - \int \left(-\frac{2x}{1-2x}\right) dx =$
$= x\ln(1-2x) - \int \left(\frac{2x}{2x-1}\right) dx = x\ln(1-2x) - \int \left(\frac{2x-1+1}{2x-1}\right) dx =$
$= x\ln(1-2x) - x - \frac{1}{2}\int \left(\frac{2}{2x-1}\right) dx = \left(x - \frac{1}{2}\right)\ln(1-2x) - x + c$

4. La funzione $f(x) = \frac{2}{4-x} - \frac{5}{2}$ nel dominio $\left[0, \frac{7}{2}\right]$ ha per grafico un arco di iperbole equilatera (che avrebbe asintoti verticale $x = 4$ e orizzontale $y = -\frac{5}{2}$, però fuori dominio), crescente sul dominio, che interseca l'asse x in $x = \frac{16}{5}$. Inoltre, essendo $f(0) = -2 = -\frac{1}{2}$, e $f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{3}{2}$, il grafico di $f(x)$ interseca l'asse y in $P \equiv (0, -2)$ e la retta di equazione $x = \frac{7}{2}$ in $Q_1 \equiv \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$.
La funzione $g(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x$ nel dominio $\left[0, \frac{7}{2}\right]$ ha per grafico un arco di parabola convessa, passante per l'origine degli assi (e per $(4, 0)$ che però è fuori dominio) e quindi di vertice $V = \left(2, -\frac{2}{3}\right)$: essendo $g(0) = 0$ e $g\left(\frac{7}{2}\right) = -\frac{7}{24}$ il grafico di $g(x)$ interseca l'asse y nell'origine e la retta di equazione $x = \frac{7}{2}$ in $Q_2 \equiv \left(\frac{7}{2}, -\frac{7}{24}\right)$. Poiché $f(0) - g(0) < 0 < f\left(\frac{7}{2}\right) - g\left(\frac{7}{2}\right)$, per il teorema degli zeri delle funzioni continue esiste almeno un'intersezione tra i grafici delle due funzioni nel dominio $\left[0, \frac{7}{2}\right]$. Si verifica che tale intersezione ha coordinate $\left(3, -\frac{1}{2}\right)$ ed è unica.
Per farlo si può proseguire con un aggiustamento del metodo di bisezione: nel *quasi* punto medio $x = 2$ di $\left[0, \frac{7}{2}\right]$ si ha $f(2) - g(2) < 0$ e nel *quasi* punto medio $x = 3$ di $\left[2, \frac{7}{2}\right]$ si ha $f(3) - g(3) = 0$! Oppure si può studiare la disuguaglianza $f(x) - g(x) \geq 0$ che si trasforma in $x^2 - 4x \geq \frac{12}{4-x} - 15$ cioè, riducendo allo stesso denominatore, $\frac{x^3 - 8x^2 + 31x - 48}{4-x} \geq 0$.
Usando la regola di Ruffini si trova che il numeratore ha radice $x = 3$ e la frazione si può riscrivere $\frac{(x-3)(x^2-5x+16)}{4-x}$: nell'intervallo $\left[0, \frac{7}{2}\right]$ il denominatore è sempre positivo ed il

numeratore lo è se e solo se $x \in \left[3, \frac{7}{2}\right]$.



Concludendo si ha $f(x) \leq g(x)$ allorché $x \in [0,3]$ e $f(x) \geq g(x)$ allorché $x \in \left[3, \frac{7}{2}\right]$.

Dunque la regione R da prendere in esame è quella delimitata in figura dalla linea più spessa, la cui area è data da

$$\mathcal{A}(R) = \int_0^3 (g(x) - f(x))\, dx + \int_3^{7/2} (f(x) - g(x))\, dx.$$

Si deve dunque calcolare l'integrale indefinito

$$\int \left[\frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{4-x} + \frac{5}{2}\right] dx = \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 2\ln|x-4| + \frac{5}{2}x + c$$

e il suo opposto e risulta

$$\mathcal{A}(R) = \left[\frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{2}x + 2\ln|x-4|\right]_0^3 - \left[\frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{2}x + 2\ln|x-4|\right]_3^{7/2} =$$

$$= 2\left(\frac{27}{18} - \frac{9}{3} + \frac{15}{2} + 2\ln|1|\right) - 2\ln|4| - \frac{1}{18}\left(\frac{7}{2}\right)^3 + \frac{1}{3}\left(\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{35}{4} - 2\ln\left|\frac{1}{2}\right|$$

$$= 12 - 4\ln 2 - \frac{1}{18}\left(\frac{7}{2}\right)^3 + \frac{1}{3}\left(\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{35}{4} + 2\ln 2 = \frac{713}{144} - 2\ln 2$$

5. La funzione $f(t) = \frac{2}{t^2\sqrt{t-1}}$ è definita in $(1, +\infty)$, in quanto perché sia definita la radice deve essere $t \geq 1$ e perché sia definita la frazione deve essere anche $t \neq 1$. In tale intervallo la funzione è anche sempre continua e positiva.

   (a) Per $t \to 1^+$, $f(t) \simeq \frac{2}{\sqrt{t-1}}$;
   per $t \to +\infty$, $f(t) \simeq \frac{2}{t^2\sqrt{t}} \simeq \frac{2}{t^{5/2}}$ e quindi la funzione tende a zero.

   (b) Per le osservazioni appena fatte $\int_{1^+}^{+\infty} f(t)\, dt = \int_{1^+}^{2} f(t)\, dt + \int_2^{+\infty} f(t)\, dt$ è somma di un integrale di prima ed uno di seconda specie.
   La funzione $f(t)$ è positiva in $(1, +\infty)$: quindi si può applicare un criterio di convergenza per gli integrali impropri, in particolare quello del confronto asintotico.
   Osserviamo che per $t \to 1^+$ la funzione $f(t)$ è asintotica a $\frac{2}{\sqrt{t-1}}$ e l'integrale improprio di seconda specie $\int_{1^+}^{2} \frac{2}{\sqrt{t-1}} dt$ converge: per il criterio del confronto asintotico, l'integrale improprio di seconda specie $\int_{1^+}^{2} f(t)\, dt$ <u>converge</u>.
   Invece per $t \to +\infty$ la funzione $f(t)$ è asintotica a $\frac{2}{t^{5/2}}$ e l'integrale improprio di prima specie $\int_2^{+\infty} \frac{2}{t^{5/2}} dt$ converge: quindi anche l'integrale improprio di prima specie $\int_2^{+\infty} f(t)\, dt$ <u>converge</u>.
   Di conseguenza $\int_{1^+}^{+\infty} f(t)\, dt$ <u>converge</u> in quanto somma di due integrali convergenti.

6. La funzione di due variabili $f(x,y) = x^2y + 3x^2 + \frac{2}{3}y^2$ ha derivate parziali $f_x(x,y) = 2xy + 6x$ e $f_y(x,y) = x^2 + \frac{4}{3}y$. I suoi punti critici sono quelli le cui coordinate annullano il gradiente $\mathbf{grad}\,(f(x,y)) = (f_x(x,y)\,, f_y(x,y))$, cioè le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 2xy + 6x = 0 \\ x^2 + \frac{4}{3}y = 0 \end{cases}$$ che si scompone nei due sistemi

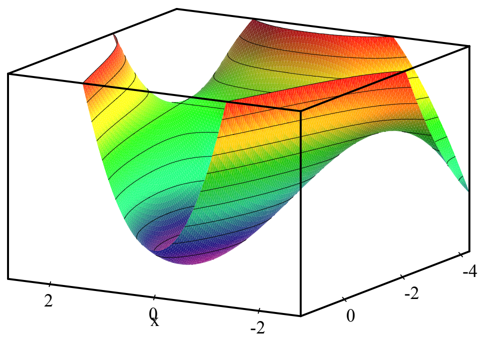
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y + 3 = 0 \\ x^2 = 4 \end{cases}$$

che hanno soluzioni: $(0,0)$, $(\pm 2, -3)$, come si può anche rilevare sulla descrizione geometrica del sistema. Questi sono i punti critici.

Tenuto conto che l'hessiano è $H(x,y) = \begin{vmatrix} 2y+6 & 2x \\ 2x & \frac{4}{3} \end{vmatrix} = \frac{8}{3}(y+3) - 4x^2$, si vede che:

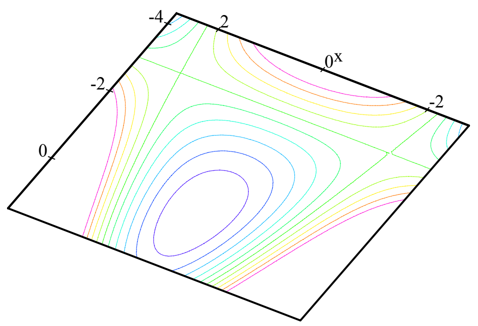
$H(0,0) = 8$ ed, essendo $f_{yy}(0,0) = \frac{4}{3} > 0$, $\boxed{(0,0) \text{ è un punto di minimo locale}}$;

$H(\pm 2, -3) = -4\,(\pm 2)^2 < 0$ e quindi $\boxed{\pm 2, -3 \text{ sono punti di sella}}$



Le 2 figure sono ottenute considerando solo la parte di grafico contenuto tra i piani $x = -2.8$ e $x = 2.8$, $y = -4.3$ e $y = 1.5$, $z = -1$ e $z = 10$.

La prima mostra il minimo (punto: $(0,0,0)$) e le due selle (punti: $(\pm 2, -3, 6)$);



la seconda fornisce la proiezione in piano con le curve di livello: punto di minimo è al centro di una zone delimitata da curve chiuse; i punti di sella stanno dove le curve di livello si aprono "a stella". Si vede una retta, proiezione della $\{y = -3, z = 6\}$, che passa per i punti di sella.

7. $y' = \frac{t}{2}(y-1)(3-y)$ è un'equazione differenziale del I ordine a variabili separabili, prodotto di un polinomio in t e di un polinomio in y (entrambi sono palesemente funzioni continue su tutto l'asse reale).

   (a) Quest'equazione ammette due soluzioni costanti: $y(t) = 1$ e $y(t) = 3$ e l'integrale generale si può ricavare risolvendo l'equazione integrale $\int \frac{dy}{(y-1)(3-y)} = \int \frac{t}{2} dt$.

Risulta $\dfrac{1}{(y-1)(3-y)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{y-1} - \dfrac{1}{y-3}\right)$ e quindi, integrando:

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y-3}\right| = \frac{t^2}{4} + k \ (\text{con } k \in \mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{y-1}{y-3}\right| = e^K \cdot e^{t^2/2} \ (\text{con } K = 2k \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y-1}{y-3} = ce^{t^2/2} \ (\text{con } c \in \mathbb{R}).$$

Risolvendo rispetto a y quest'ultima uguaglianza, che tiene conto anche della soluzione $y(t) = 1$, da $y\left(1 - ce^{t^2/2}\right) = 1 - 3ce^{t^2/2}$ si ricava l'integrale generale $\boxed{y(t) = \dfrac{1-3ce^{t^2/2}}{1-ce^{t^2/2}}}$.

Le funzioni di questo tipo sono soluzioni (cioè sono derivabili e soddisfano l'equazione differenziale) purché il denominatore sia diverso da 0, quindi per ogni t reale se $c < 0$ mentre se $c > 0$ solo per $t \in \left(-\infty, -\sqrt{-2\ln c}\right)$ o per $t \in \left(-\sqrt{-2\ln c}, \sqrt{-2\ln c}\right)$ o per $t \in \left(\sqrt{-2\ln c}, +\infty\right)$.

(b) Perché la funzione soluzione $y(t)$ soddisfi la condizione iniziale $y(0) = 2$, basta che sia $\dfrac{y(0)-1}{y(0)-3} = ce^{0/2}$ cioè $c = -1$. Quindi la soluzione di questo problema di Cauchy è la funzione $\boxed{y(t) = \dfrac{1+3e^{t^2/2}}{1+e^{t^2/2}}}$, che ha per dominio l'asse reale. Invece la condizione iniziale $y(0) = 3$ viene soddisfatta dalla soluzione particolare $y(t) = 3$.

8. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & k & 1 \\ 2+k & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & k \end{pmatrix}$ ha rango un numero $rg(A) \leq 3$ (in quanto non può essere superiore al minimo tra il numero di righe ed il numero di colonne della matrice).
D'altra parte risulta anche $rg(A) \geq 2$, visto che A contiene una sottomatrice quadrata di ordine 2 con determinante diverso da 0, $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Orlando A' con la terza colonna e l'ultima riga di A si ha una matrice il cui determinante $\begin{vmatrix} 2 & 0 & k \\ 2+k & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2(-4+k) + 2k(2+k) = 2(k^2+3k-4)$ si annulla solo per $k = 1$ e $k = -4$: quindi per valori di k diversi da questi A ha certamente rango 3.
$\boxed{\text{Se } k = -4}$ si ha $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ e considerando le prime due colonne e la quarta si ha una matrice il cui determinante $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 2(-8+1) - 2(6+2) = -30$ è diverso da zero: quindi A ha ancora rango 3.
$\boxed{\text{Se } k = 1}$ si ha $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ e la sottomatrice formata dalle prime due colonne e dalla quarta ha determinante $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(2+1) - 2(6-3)$ nullo: per il metodo di Kroneker, avendo orlato una matrice quadrata 2×2 a determinante non nullo con tutte le righe e le colonne possibili e non avendo trovato alcuna matrice 3×3 a determinante non nullo, possiamo garantire che $rg(A) < 3$ e quindi $rg(A) = 2$, visto che come già detto $rg(A) \geq 2$.