Soluzioni del compito di Istituzioni di Matematiche per Chimica (20/6/08)

1. Il numero complesso $\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}$ è il rapporto tra i due numeri $z=\sqrt{3}-i$, e $w=1+i$.
Ne segue che il suo modulo è il rapporto dei due moduli e un argomento è la differenza tra un argomento del numeratore ed uno del denominatore.
Quindi $\left|\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right| = \dfrac{|\sqrt{3}-i|}{|1+i|} = \dfrac{\sqrt{3+1}}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$.
Inoltre l'argomento principale di z è $-\dfrac{\pi}{6}$ in quanto $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$; l'argomento principale di w è $\dfrac{\pi}{4}$ in quanto $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$; di conseguenza un argomento per $\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}$ è $-\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{5\pi}{12}$: tale argomento è anch'esso principale.

2. La funzione $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x}}$

(a) è definita purché risulti $x^2-3x>0$ (in modo che sia definita la radice e anche la frazione). Quindi l'insieme di definizione è $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$. In questi intervalli il denominatore è positivo e quindi la funzione lo è purché lo sia il numeratore, cioè $f(x)<0$ in $(-\infty,0)$ e $f(x)>0$ in $(3,+\infty)$.

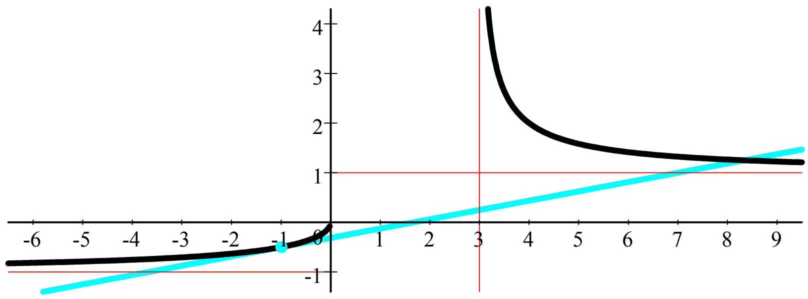
(b) Per $x\to-\infty$ si ha $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{|x|} = -1$ e quindi la funzione per $x\to-\infty$ ha asintoto orizzontale $y=-1$.
Per $x\to 0^-$ si ha $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{x}{\sqrt{-3x}} = \lim\limits_{x\to0^-} -\dfrac{\sqrt{-x}}{\sqrt{3}} = 0^-$ e quindi NON c'è asintoto.
Per $x\to3^+$ si ha $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{3}{\sqrt{3(x-3)}} = \lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{x-3}} = +\infty$: quindi la funzione per $x\to3^+$ ha asintoto verticale $x=3$.
Per $x\to+\infty$ si ha $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{|x|} = 1$ e quindi la funzione per $x\to+\infty$ ha asintoto orizzontale $y=1$.

(c) $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-3x} - x\cdot\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}}{x^2-3x} = \dfrac{2(x^2-3x)-x(2x-3)}{2(x^2-3x)^{3/2}} = \dfrac{-3x}{2(x^2-3x)^{3/2}}$
$\lim\limits_{x\to0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{-3x}{2|x^2-3x|(x^2-3x)^{1/2}} = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{3}{2(3-x)(x^2-3x)^{1/2}} = +\infty$

(d) $f'(x)>0 \iff x\in(-\infty,0)$ mentre $f'(x)<0 \iff x\in(3,+\infty)$
Ne consegue che la funzione cresce in $(-\infty,0)$ e decresce in $(3,+\infty)$ e non presenta estremi relativi né assoluti.

(e) Si ha $f(-1) = -\dfrac{1}{2}$ e $f'(-1) = \dfrac{3}{2(4)^{3/2}} = \dfrac{3}{16}$; quindi l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa -1 è $y = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{16}(x+1)$.

(f) Nel successivo grafico di $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x}}$, sono evidenziati l'asintoto verticale e quelli orizzontali e la tangente di cui è richiesta l'equazione

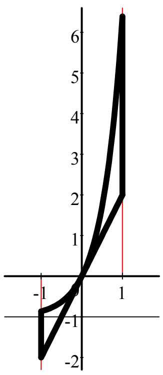


3. $\displaystyle\int x\ln(x+1)\,dx = \boxed{\text{per parti con fattor finito } \ln(x+1)} = \frac{1}{2}x^2\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x+1}dx =$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2\ln(x+1) - \int\frac{(x^2-1)+1}{x+1}dx\right] = \frac{1}{2}\left[x^2\ln(x+1) - \int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)\right]dx =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\left[(x^2-1)\ln(x+1) + x - \frac{x^2}{2}\right] + c}$$

4. La funzione $f(x) = e^{2x} - 1$ nel dominio $[-1, 1]$ ha per grafico un arco di esponenziale crescente traslato di 1 nella direzione dell'asse y e nel verso opposto (che, fuori dominio, avrebbe asintoto orizzontale $y = -1$ per $x \to -\infty$); esso passa per l'origine del sistema di riferimento. Inoltre, essendo $f(-1) = e^{-2} - 1$, e $f(1) = e^2 - 1$, il grafico di $f(x)$ interseca le due rette di equazione $x = -1$ e $x = 1$ rispettivamente in $A \equiv (-1, e^{-2} - 1)$ e $B \equiv (1, e^2 - 1)$.



La funzione $g(x) = 2x$ nel dominio $[-1, 1]$ ha per grafico un segmento di retta con coefficiente angolare positivo, che passa per l'origine del sistema di riferimento ed in tale punto è tangente al grafico di $f(x)$ dato che $f'(x) = 2e^{2x}$ in $x = 0$ vale 2. Poiché $f(x) = e^{2x} - 1$ è una funzione convessa (su $\mathbb{R}$ ed in particolare in $[-1, 1]$) la tangente sta tutta al di sotto del grafico dell'esponenziale: quindi l'origine è l'unico punto che i due grafici hanno in comune e $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in [-1, 1]$ Dunque la regione R da prendere in esame è quella delimitata in figura dalla linea più spessa, la cui area è data da

$$\mathcal{A}(R) = \int_{-1}^{1}(f(x) - g(x))\,dx.$$

Poiché l'integrale indefinito è $\displaystyle\int[(e^{2x}-1)-(2x)]dx = \frac{1}{2}e^{2x} - x - x^2 + c$, risulta

$$\mathcal{A}(R) = \left[\frac{1}{2}e^{2x} - x - x^2\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}e^2 - 1 - 1 - \frac{1}{2}e^{-2} - 1 + 1 = \boxed{\frac{e^2 - e^{-2}}{2} - 2} \approx 1.627$$

5. La funzione $f(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)\ln t}$ è definita in $(0,1) \cup (1,+\infty)$, in quanto perché sia definito il logaritmo deve essere $t > 0$ e perché sia definita la frazione deve essere anche $t \neq 1$. Nell'intervallo $(1,+\infty)$ la funzione è sempre continua e positiva.

   (a) Per $t \to 1^+$, $f(t) \simeq \dfrac{1}{2\ln t} \simeq \dfrac{1}{2\,(t-1)}$: si può vedere che vale questo asintotico sostituendo $t = z+1$ e osservando che se $t \to 1^+$ allora $z \to 0^+$
   per $t \to +\infty$, $f(t) \simeq \dfrac{1}{t^2 \cdot \ln t}$ e quindi la funzione tende a zero.

   (b) $\int\limits_{1^+}^{+\infty} f(t)\,dt = \int\limits_{1^+}^{e} f(t)\,dt + \int\limits_{e}^{+\infty} f(t)\,dt$ è somma di un integrale di seconda ed uno di prima specie; si potrebbe scegliere qualunque altro valore in $(1,+\infty)$ come estremo di integrazione intermedio ma vedremo subito che la scelta di e è più comoda.
   La funzione $f(t)$ è positiva in $(0,+\infty)$: quindi si può applicare un criterio di convergenza per gli integrali impropri, in particolare quelli del confronto e del confronto asintotico.
   Osserviamo che per $t \to 1^+$ la funzione $f(t)$ è asintotica a $\dfrac{1}{2\,(t-1)}$ e l'integrale improprio di seconda specie $\int\limits_{1^+}^{e} \dfrac{1}{2\,(t-1)} dt$ diverge (potenza di $t-1$ con esponente ≤ -1): per il criterio del confronto asintotico, l'integrale improprio di seconda specie $\int\limits_{1^+}^{e} f(t)\,dt$ <u>diverge</u>.
   Invece per $t \to +\infty$ la funzione $f(t)$ è asintotica a $\dfrac{1}{t^2 \cdot \ln t} < \dfrac{1}{t^2}$ per $t > e$; visto che l'integrale improprio di prima specie $\int\limits_{e}^{+\infty} \dfrac{1}{t^2} dt$ converge (potenza di t con esponente < -1) anche $\int\limits_{e}^{+\infty} \dfrac{1}{t^2 \cdot \ln t} dt$ converge per il criterio del confronto: quindi per il criterio del confronto asintotico anche l'integrale improprio di prima specie $\int\limits_{e}^{+\infty} f(t)\,dt$ <u>converge</u>.
   Di conseguenza $\int\limits_{1^+}^{+\infty} f(t)\,dt$ <u>diverge</u> in quanto somma di un integrale convergente e di uno divergente.

6. La funzione di due variabili $f(x,y) = (\sin x)\,(\cos y)$ ha derivate parziali

$$f_x(x,y) = (\cos x)\,(\cos y) \qquad \text{e} \qquad f_y(x,y) = -\,(\sin x)\,(\sin y).$$

   I suoi punti critici sono quelli le cui coordinate annullano il gradiente

$$\mathbf{grad}\,(f(x,y)) = (f_x(x,y)\,,f_y(x,y)),$$

   cioè le soluzioni del sistema: $\begin{cases} (\cos x)\,(\cos y) = 0 \\ (\sin x)\,(\sin y) = 0 \end{cases}$
   il quale, visto che seno e coseno non si annullano mai contemporaneamente, ha per soluzioni l'unione delle soluzioni dei due sistemi $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin y = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} \cos y = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases}$
   I <u>punti critici</u> sono quindi quelli della forma $\left(\frac{\pi}{2} + h\pi, k\pi\right)$, $\left(m\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$, al variare comunque di h, k, m, n in $\mathbb{Z}$. Tenuto conto che l'hessiano è

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} -(\sin x)(\cos y) & -(\cos x)(\sin y) \\ -(\cos x)(\sin y) & -(\sin x)(\cos y)\end{vmatrix}=(\sin x)^2(\cos y)^2-(\cos x)^2(\sin y)^2=$$

$=(\sin x)^2-(\sin x)^2(\sin y)^2-(\sin y)^2+(\sin x)^2(\sin y)^2=(\sin x)^2-(\sin y)^2$, si vede che:

$H\left(m\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi\right)=(\sin(m\pi))^2-\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)\right)^2=-1<0$ e quindi

- $\boxed{\text{ogni punto della forma } \left(m\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi\right) \text{ è un punto di sella}}$;

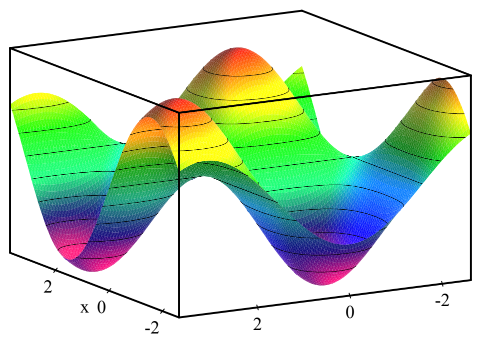
$H\left(\frac{\pi}{2}+h\pi,k\pi\right)=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\pi\right)\right)^2-(\sin(k\pi))^2=1>0$ ed, essendo

$f_{xx}\left(\frac{\pi}{2}+h\pi,k\pi\right)=\begin{cases} -1 \text{ se } h+k \text{ è pari} \\ 1 \text{ se } h+k \text{ è dispari}\end{cases}$, sono punti di

- $\boxed{\text{minimo locale quelli della forma } \left(\frac{\pi}{2}+h\pi,(2a+1-h)\pi\right)}$
- $\boxed{\text{massimo locale quelli della forma } \left(\frac{\pi}{2}+h\pi,(2a-h)\pi\right)}$.

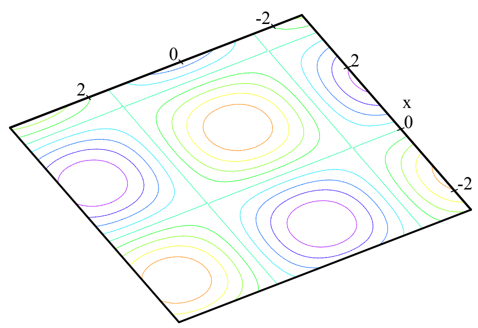
Ad esempio nella regione $\left(-\frac{5}{6}\pi,\frac{7}{6}\pi\right]\times\left(-\frac{5}{6}\pi,\frac{7}{6}\pi\right]$ sono punti di sella $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0,-\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)$ e $\left(\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$, punti di minimo locale $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ e $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ e punti di massimo locale $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ e $\left(-\frac{\pi}{2},\pi\right)$

Nei punti di sella la funzione vale 0; nei punti di minimo locale vale -1; nei punti di massimo locale vale 1



Le 2 figure sono ottenute considerando solo la parte di grafico contenuta tra i piani $x=-\frac{5}{6}\pi$ e $x=\frac{7}{6}\pi$, $y=-\frac{5}{6}\pi$ e $y=\frac{7}{6}\pi$, $z=-1$ e $z=1$.

La prima mostra i punti di sella e gli estremanti locali;



la seconda fornisce la proiezione in piano con le curve di livello: i punti estremanti sono al centro di zone delimitate da curve chiuse; i punti di sella stanno dove le curve di livello si incrociano.

7. $y'-2y\tan t=\sin t$ è un'equazione differenziale del I ordine lineare completa, con coefficiente di y continuo ove definito (cioè per $t\neq\frac{\pi}{2}=k\pi$) e termine noto continuo su tutto l'asse reale.

   (a) Si deve quindi in primo luogo risolvere l'equazione omogenea associata: $z'=2z\tan t$ che si risolve come un'equazioni a variabili separabili. Isolata la soluzione costante $z=0$, si integra: $\displaystyle\int\frac{dz}{z}=\int 2\frac{\sin t}{\cos t}dt$, trovando $\ln|z|=-2\ln|\cos t|+k$ e quindi $|z|=e^k|\cos t|^{-2}$ cioè (tenuto conto anche della soluzione costante e posto $\pm e^k=c\in\mathbb{R}$): $z(t)=\dfrac{c}{(\cos t)^2}$.

Si cerca poi una soluzione particolare dell'equazione completa usando il metodo di variazione delle costanti: si determina una funzione $c\,(t)$ in modo che $\overline{y}\,(t) = \dfrac{c\,(t)}{(\cos t)^2}$ soddisfi l'equazione completa:

$$\overline{y}' - 2y\tan t = \sin t \iff \left(\frac{c'\,(t)\,(\cos t)^2 + 2c\,(t)\,(\cos t)\,(\sin t)}{(\cos t)^4} - 2\frac{c\,(t)}{(\cos t)^2} \cdot \frac{\sin t}{\cos t} \right) = \sin t \iff$$

$$\iff c'\,(t) = \sin t\,(\cos t)^2,$$ cioè $c\,(t)$ è una primitiva di $\sin t\,(\cos t)^2$.

Ora, $\int \sin t\,(\cos t)^2\,dt = -\dfrac{1}{3}\int \left[-3\sin t\,(\cos t)^2\right] dt = -\dfrac{1}{3}\,(\cos t)^3 + C$,

quindi si può scegliere $\overline{y}\,(t) = -\dfrac{1}{3}\,(\cos t)^3$.

L'integrale generale della completa è la somma dell'integrale generale dell'omogenea associata e della soluzione particolare appena trovata: $\boxed{y\,(t) = \dfrac{c}{(\cos t)^2} - \dfrac{1}{3}\,(\cos t)^3}$.

(b) Perché la funzione soluzione $y(t)$ soddisfi la condizione iniziale $y(0) = 1$, basta che sia $1 = \dfrac{c}{(\cos 0)^2} - \dfrac{1}{3}\,(\cos 0)^3$ cioè $c = \dfrac{4}{3}$. Quindi la <u>soluzione di questo problema di Cauchy</u> è la funzione $\boxed{y(t) = \dfrac{4}{3\,(\cos t)^2} - \dfrac{1}{3}\,(\cos t)^3}$, che ha per dominio l'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ dato che questo è l'intervallo in cui sono continue le funzioni coefficienti dell'equazione differenziale che contiene il punto iniziale $t = 0$.

8. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & -k \\ 2k & -1 & 1 \\ -3 & 4 & k-5 \end{pmatrix}$ è invertibile se e solo se il suo determinante è non nullo. Ora

$$\begin{vmatrix} 1 & k+1 & -k \\ 2k & -1 & 1 \\ -3 & 4 & k-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -k \\ 2k & 0 & 1 \\ -3 & k-1 & k-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -k \\ 2k & 0 & 1 \\ -2 & k & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -2k\,(-5 + k^2) - (k+2) = -2k^3 + 9k - 2 = (2-k)\,(2k^2 + 4k - 1) = 0,$$

per $k = 1$ o per $k = -1 \pm \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Se k è diverso da questi tre valori, la matrice è invertibile.