Soluzioni del compito di Istituzioni di Matematiche per Chimica (22/7/08)

1. Il numero complesso $(1-i)\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^9$ è il prodotto tra $z=1-i$ e la potenza nona di $w=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i$.
Ne segue che il suo modulo è il prodotto del modulo di z e di quello di w^9 mentre un argomento è la somma tra un argomento di z ed uno di w^9.
Ora $|z|=\sqrt{2}$ mentre $|w^9|=|w|^9=\left(\frac{1}{2}\right)^9$: quindi il modulo del numero è $|zw^9|=\frac{\sqrt{2}}{2^9}$.
Inoltre l'argomento principale di z è $-\frac{\pi}{4}$ in quanto $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; l'argomento principale di w è $\frac{\pi}{3}$ in quanto $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ e $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; di conseguenza un argomento per w^9 è $9\cdot\frac{\pi}{3}=3\pi$ ed un argomento per zw^9 è $3\pi-\frac{\pi}{4}=2\pi+\frac{3\pi}{4}$: l'argomento principale ad esso corrispondente è dunque $\frac{3\pi}{4}$.

2. La funzione $f(x)=x\sqrt{1-8x^3}$

   (a) è definita purché risulti $1-8x^3\geq 0$ (in modo che sia definita la radice). Quindi l'insieme di definizione è $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.
   In questo intervallo la radice è non negativa e quindi la funzione è negativa in $(-\infty,0)$ e positiva in $\left(0,\frac{1}{2}\right]$, mentre ha due zeri, rispettivamente in $x=0$ e in $x=\frac{1}{2}$.

   (b) Per $x\to-\infty$ si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x\sqrt{-8x^3}=-\infty$ senza asintoti poiché $x\sqrt{8\,(-x)^3}=-2^{3/2}\,(-x)^{5/2}$ va a $-\infty$ secondo una potenza di $|x|$ diversa da 1.
   Nell'estremo $\frac{1}{2}$ la funzione è definita e continua da sinistra e quindi il limite per $x\to\frac{1}{2}^-$ coincide con il valore (nullo) della funzione.

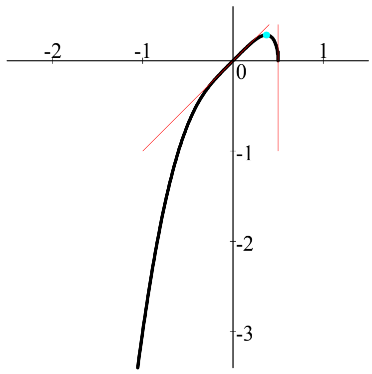
   (c) $f'(x)=\sqrt{1-8x^3}+x\cdot\frac{-24x^2}{2\sqrt{1-8x^3}}=\frac{1-8x^3-12x^3}{\sqrt{1-8x^3}}=\frac{1-20x^3}{\sqrt{1-8x^3}}$
   $\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f'(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{\frac{-3}{2}}{\sqrt{1-8x^3}}=-\infty$

   (d) $f'(x)>0\iff x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ e $1-20x^3>0$ cioè in $\left(-\infty,\frac{1}{\sqrt[3]{20}}\right)$, mentre
   $f'(x)<0\iff x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ e $1-20x^3<0$ cioè in $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{20}},\frac{1}{2}\right]$
   Ne consegue che la funzione cresce in $\left(-\infty,\frac{1}{\sqrt[3]{20}}\right)$ e decresce in $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{20}},\frac{1}{2}\right]$ e presenta massimo relativo e assoluto in $x=\frac{1}{\sqrt[3]{20}}$, punto in cui la funzione vale
   $$f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{20}}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{20}}\sqrt{1-\frac{8}{20}}=\frac{12^{1/2}}{20^{1/3}\cdot 20^{1/2}}=\frac{12^{3/6}}{20^{5/6}}=\sqrt[6]{\frac{3^3\cdot 4^3}{5^5\cdot 4^5}}=\sqrt[6]{\frac{27}{50000}}\approx 0.285$$

(e) Si ha $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$; quindi l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa 0 è $\boxed{y = x}$.

Invece, visto che la derivata prima in $x = \frac{1}{2}$ non esiste ed il suo limite da sinistra è $-\infty$, la tangente nel punto del grafico di ascissa $\frac{1}{2}$ è verticale ed ha equazione $\boxed{x = \frac{1}{2}}$.

(f) Nel grafico di $f(x) = x\sqrt{1 - 8x^3}$, sono evidenziate le due tangenti di cui è richiesta l'equazione ed il massimo.

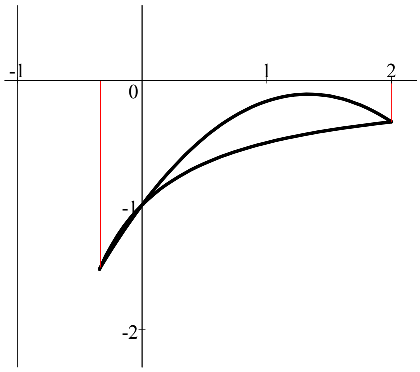


3. $$\int \left(\sqrt{-x} + xe^{2x+1}\right) dx = \boxed{\text{per scomposizione}} = \int \left(\sqrt{-x}\right) dx + \int \left(xe^{2x+1}\right) dx =$$

$$= \boxed{\begin{array}{l}\text{il primo per sostituzione immediata,} \\ \text{l'altro per parti con fattor finito } x\end{array}} = \left[-\frac{2}{3}\left(-x\right)^{3/2}\right] + \left[\frac{1}{2}xe^{2x+1} - \frac{1}{2}\int e^{2x+1}dx\right] =$$

$$= \boxed{-\frac{2}{3}\left(-x\right)^{3/2} + \frac{1}{2}xe^{2x+1} - \frac{1}{4}e^{2x+1} + c}$$

4. La funzione $f(x) = -\dfrac{1}{x+1}$ nel dominio $\left[-\frac{1}{3}, 2\right]$ ha per grafico un arco di iperbole crescente con asintoto orizzontale $y = 0$ e asintoto verticale $x = -1$ entrambi al di fuori del dominio. Tale grafico interseca l'asse y in $B \equiv (0, -1)$; inoltre, essendo $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{3}{2}$, e $f(2) = -\frac{1}{3}$, esso interseca le due rette di equazione $x = -\frac{1}{3}$ e $x = 2$ rispettivamente in $A \equiv \left(-\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}\right)$ e $C \equiv \left(2, -\frac{1}{3}\right)$.



La funzione $g(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{4}{3}x - 1$ nel dominio $\left[-\frac{1}{3}, 2\right]$ ha per grafico un arco di parabola con concavità volta verso il basso, asse di equazione $x = \dfrac{4}{3}$ e vertice in $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{1}{9}\right)$ e quindi non ha intersezione con l'asse x.

È immediato verificare che anche questo grafico passa per A, B e C. Inoltre in $\left[-\frac{1}{3}, 2\right]$ risulta $x + 1 > 0$: quindi $f(x) \geq g(x) \Longleftrightarrow \dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{4}{3}x + 1$
$\Leftrightarrow (x+1)\left(3x^2 - 8x + 6\right) \geq 6 \Leftrightarrow 3x^3 - 5x^2 - 2x \geq 0$
$\Leftrightarrow x\left(3x+1\right)\left(x-2\right) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq 0$ oppure, ma è fuori dominio, $x \geq 2$.

Dunque la regione R da prendere in esame è quella delimitata in figura dalla linea più spessa, la cui area è data da

$$\mathcal{A}(R) = \int_{-1/3}^{0} (f(x) - g(x))\, dx + \int_{0}^{2} (g(x) - f(x))\, dx.$$

Poiché $\displaystyle\int \left[\left(\frac{-1}{x+1}\right) - \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x - 1\right)\right] dx = -\ln|x+1| + \frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + x + c$, risulta

$$\mathcal{A}(R) = \left[-\ln|x+1| + \frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + x\right]_{-1/3}^{0} + \left[\ln|x+1| - \frac{1}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - x\right]_{0}^{2} =$$

$$= \left(\ln\frac{2}{3} + \frac{1}{162} + \frac{2}{27} + \frac{1}{3}\right) + \left(\ln 3 - \frac{8}{6} + \frac{8}{3} - 2\right) = \boxed{\ln 2 - \tfrac{41}{162}} \approx 0.44.$$

5. La funzione $f(t) = \dfrac{t}{\ln(t^2)}$ è definita in $\mathbb{R}\setminus\{0, 1, -1\}$, in quanto perché sia definito il logaritmo deve essere $t \neq 0$ e perché sia definita la frazione deve essere $\ln(t^2) \neq 0$. Nell'intervallo $(0, 1)$ la funzione è sempre continua e negativa in quanto il denominatore è negativo.

   (a) Per $t \to 0^+$, $\ln(t^2) \to -\infty$ e quindi $f(t) \to 0^-$.
   Per $t \to 1^-$, $\ln(t^2) \to 0^-$ e quindi $f(t) \to -\infty$.
   Per trovare una funzione asintotica a $f(t)$ per $t \to 1^-$, osserviamo che essendo $t > 0$ si può scrivere $\ln(t^2) = 2\ln t$ e che per $t \to 1^-$ risulta $2\ln t = 2\ln(1 + (t-1)) \simeq 2(t-1)$: quindi
   $$f(t) = \frac{t}{\ln(t^2)} \simeq \frac{t - 1 + 1}{2(t-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(t-1)}$$

   (b) Come appena visto, la funzione in 0 non è definita ma ha limite finito: quindi l'integrale generalizzato $\int_{0^+}^{1/2} f(t)\, dt = \lim_{x\to 0^+} \int_{x}^{1/2} f(t)\, dt$ esiste finito e può essere pensato come integrale di Cauchy-Riemann della funzione $f(t)$ la cui definizione sia completata per continuità in $t = 0$.
   Invece il limite della funzione per $t \to 1^-$ è infinito e quindi $\int_{1/2}^{1^-} f(t)\, dt$ è un integrale improprio di seconda specie.
   La funzione $f(t)$ è negativa in $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$: quindi si può applicare un criterio di convergenza per gli integrali impropri, in particolare quello del confronto asintotico.
   Per $t \to 1^-$ la funzione $f(t)$ è asintotica a $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2(t-1)}$: ora $\displaystyle\int_{1/2}^{1^-} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2(t-1)}\right) dt = \frac{1}{4} + \int_{1/2}^{1^-} \frac{dt}{2(t-1)}$, ma l'integrale improprio di seconda specie $\displaystyle\int_{1/2}^{1^-} \frac{dt}{2(t-1)}$ diverge (potenza di $t - 1$ con esponente ≤ -1): dunque $\displaystyle\int_{1/2}^{1^-} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2(t-1)}\right) dt$ diverge e, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale improprio di seconda specie $\int_{1/2}^{1^-} f(t)\, dt$ <u>diverge</u>.
   Di conseguenza $\int_{0^+}^{1^-} f(t)\, dt = \int_{0^+}^{1/2} f(t)\, dt + \int_{1/2}^{1^-} f(t)\, dt$ <u>diverge</u> in quanto somma di un integrale generalizzato finito e di un integrale improprio divergente.

6. La funzione di due variabili $f(x,y) = (\sin x)^2 - 2(\cos y)$ ha derivate parziali

$$f_x(x,y) = 2(\sin x)(\cos x) = \sin 2x \qquad \text{e} \qquad f_y(x,y) = 2(\sin y).$$

I suoi punti critici sono quelli le cui coordinate annullano il gradiente

$$\mathbf{grad}\,(f(x,y)) = (f_x(x,y)\,, f_y(x,y)),$$

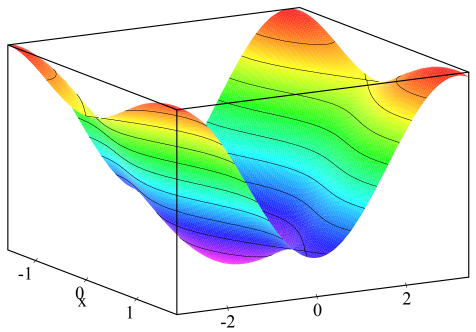
cioè le soluzioni del sistema: $\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \sin y = 0 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} 2x = h\pi \\ y = k\pi \end{cases}$

I punti critici sono quindi quelli della forma $\left(\frac{h\pi}{2}, k\pi\right)$, al variare comunque di h, k in $\mathbb{Z}$: nella regione $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times (-\pi, \pi]$ i punti di questa forma sono quattro: $(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $(0,\pi)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ed in essi la funzione vale rispettivamente: -2, -1, 2, 3. Tenuto conto che l'hessiano è

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 2(\cos 2x) & 0 \\ 0 & 2(\cos y) \end{vmatrix} = 4(\cos 2x)(\cos y)$$

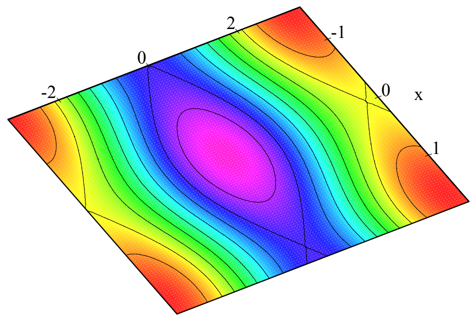
si vede che:

- $H(0,\pi) = H\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = -4 < 0$ e quindi $\boxed{(0,\pi) \text{ e } \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \text{ sono punti di sella}}$;
- $H(0,0) = H\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = 4 > 0$ ed, essendo $f_{xx}(0,0) = 2\cos 0 > 0$ e $f_{xx}\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = 2\cos\pi < 0$ e quindi $\boxed{(0,0) \text{ è un minimo locale}}$ e $\boxed{\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ è un massimo locale}}$.



Per rendere più visibili i punti critici che cadono sul bordo della regione $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times (-\pi, \pi]$, le 2 figure rappresentano la parte di grafico contenuta tra i piani $x = -\frac{\pi}{2}$ e $x = 1.8$, $y = -\pi$ e $y = 3.4$, $z = -2$ e $z = 5$.

La prima mostra i punti di sella e gli estremanti locali;



la seconda fornisce la proiezione in piano con le curve di livello: i punti estremanti sono al centro di zone delimitate da curve chiuse; i punti di sella stanno dove le curve di livello si incrociano.

7. $y' = \dfrac{1}{10}(5-y)(2-y)$ è un'equazione differenziale del I ordine a variabili separabili.
Le funzioni $a(t) = \dfrac{1}{10}$ e $b(y) = (5-y)(2-y)$ sono continue su $\mathbb{R}$. Quindi il problema di Cauchy al punto (b) è sicuramente risolubile.

(a) Quest'equazione differenziale ha tra le sue soluzioni le due funzioni costanti: $y = 5$ e $y = 2$ ciascuna delle quali annulla entrambi i membri dell'equazione differenziale.
Isolate queste soluzioni, si integra: $\displaystyle\int \frac{dy}{(5-y)(2-y)} = \int \frac{1}{10}dt$, trovando

$$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{y-5}{y-2}\right| = \frac{1}{10}t + k\ ,$$

poiché $\dfrac{1}{(5-y)(2-y)} = \dfrac{1}{(y-5)(y-2)} = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{(y-5)} - \dfrac{1}{(y-2)}\right]$. Quindi

$$\left|\frac{y-5}{y-2}\right| = e^{3k+\frac{3}{10}t},$$

cioè (tenuto conto anche della soluzione costante $y = 5$ e posto $\pm e^{3k} = c \in \mathbb{R}$):

$$\frac{y-5}{y-2} = ce^{\frac{3}{10}t}.$$

Allora, esplicitando y, l'integrale generale dell'equazione differenziale è:

$$\boxed{y(t) = \frac{5-2ce^{\frac{3}{10}t}}{1-ce^{\frac{3}{10}t}} = 2 + \frac{3}{1-ce^{\frac{3}{10}t}}}$$

(b) Perché la funzione soluzione $y(t)$ soddisfi la condizione iniziale $y(0) = 0$, basta che sia $\dfrac{5}{2} = ce^{\frac{3}{10}\cdot 0}$ cioè $c = \dfrac{5}{2}$. Quindi la soluzione di questo problema di Cauchy è la funzione descritta dalla legge $\boxed{y(t) = 2 + \dfrac{6}{2-5e^{\frac{3}{10}t}}}$, ristretta a quello dei suoi due intervalli di definizione che contiene il punto iniziale $t = 0$.
Si deve avere $5e^{\frac{3}{10}t} \neq 2$ cioè $t \neq \dfrac{10}{3}\ln\dfrac{2}{5}$ (che è un numero negativo, poiché $\dfrac{2}{5} < 1$): quindi il dominio della soluzione di Cauchy è l'intervallo $\left(\dfrac{10}{3}\ln\dfrac{2}{5}, +\infty\right)$.

8. Il prodotto vettoriale dei due vettori di $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{u} = (1,2,0)$ e $\mathbf{v} = (0,1,1)$ è il risultato del determinante formale $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, cioè $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (2,-1,1)$.
Il coseno dell'angolo convesso formato da $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ con il vettore $\mathbf{w} = (1,1,2)$ è dato da

$$\frac{(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\bullet\mathbf{w}}{|\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|} = \frac{(2,-1,1)\bullet(1,1,2)}{|(2,-1,1)|\,|(1,1,2)|} = \frac{2\cdot 1 - 1\cdot 1 + 1\cdot 2}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{1+1+4}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

e quindi l'angolo misura $\boxed{\dfrac{\pi}{3}\text{ radianti}}$.