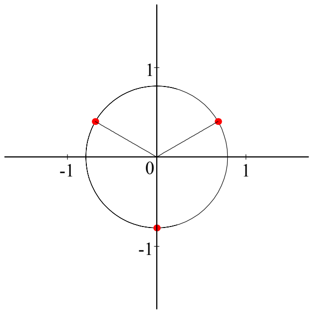
Soluzioni del compito di Istituzioni di Matematiche per Chimica (10/2/09)

1. Il numero complesso $z = \dfrac{3i+1}{6-2i}$ si scrive in forma algebrica come $\dfrac{(3i+1)(3+i)}{2(9+1)} = \dfrac{10i}{20} = \dfrac{1}{2}i$: quindi ha modulo $|z| = \dfrac{1}{2}$ e argomento $\arg z = \dfrac{\pi}{2}$. Dunque le sue radici terze hanno modulo $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ e argomento $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3}$, con $k \in \{-1, 0, 1\}$, cioè, al variare di $k \in \{-1, 0, 1\}$, hanno la forma trigonometrica:
$$w_k = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$



Ne segue che
$$w_{-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \boxed{-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}i}$$
$$w_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}i}$$
$$w_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}i}.$$

2. La funzione $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{4x-1}$

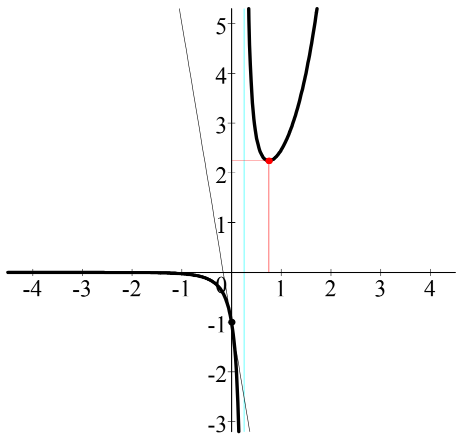
   (a) è definita in $\left(-\infty, \dfrac{1}{4}\right) \cup \left(\dfrac{1}{4}, +\infty\right)$ poiché il denominatore della frazione deve essere diverso da zero. Visto che $e^{2x} > 0$ per ogni x reale, il segno di $f(x)$ dipende dal segno del denominatore; quindi $f(x) < 0$ nell'intervallo $\left(-\infty, \dfrac{1}{4}\right)$, mentre $f(x) > 0$ nell'intervallo $\left(\dfrac{1}{4}, +\infty\right)$.
   $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{4xe^{-2x}} = 0$; quindi per $x \to -\infty$ c'è un $\boxed{\text{asintoto orizzontale: } y = 0}$;
   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{4x} = +\infty$, poiché per $x \to +\infty$ l'esponenziale e^{2x} è infinito di ordine superiore a qualunque potenza $(2x)^{\alpha}$, con α reale. Per lo stesso motivo non vi sono asintoti obliqui per $x \to +\infty$;
   $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{4}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{4}^-} \frac{e^{1/2}}{4x-1} = -\infty$; $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{4}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{4}^+} \frac{e^{1/2}}{4x-1} = +\infty$: quindi per $x \to \dfrac{1}{4}$ c'è un $\boxed{\text{asintoto verticale: } x = \dfrac{1}{4}}$.

   (b) $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}(4x-1) - 4e^{2x}}{(4x-1)^2} = \dfrac{2e^{2x}(4x-3)}{(4x-1)^2} \geq 0 \Leftrightarrow$
   $$\begin{cases} x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{4}\right) \cup \left(\dfrac{1}{4}, +\infty\right) \\ 4x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{4}\right) \cup \left(\dfrac{1}{4}, +\infty\right) \\ x \in \left[\dfrac{3}{4}, +\infty\right) \end{cases}$$
   Ne segue che la funzione cresce nell'intervallo $\left(\dfrac{3}{4}, +\infty\right)$, mentre decresce negli intervalli

$\left(-\infty, \dfrac{1}{4}\right)$ e $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right)$; in $x = \dfrac{3}{4}$ ha un punto di minimo relativo. Si ha $f\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{e^{3/2}}{2} \approx 2.2408$.

(c) Nel punto di ascissa 0 si ha $f(0) = -1$ e $f'(0) = -6$. Dunque la retta tangente al grafico nel punto $(0, -1)$ ha equazione $y = -6x - 1$.

(d) Nel sottostante grafico di $\dfrac{e^{2x}}{4x-1}$, sono evidenziati l'asintoto, la tangente, il punto di minimo relativo.



3. $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-2x^3}dx = \boxed{\begin{array}{l}\text{per sostituzione immediata:}\\ t = 1-2x^3\ ;\ dt = -6x^2dx:\end{array}} = \int -\frac{1}{6}\sqrt{t}dt = -\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}t^{3/2} + c =$

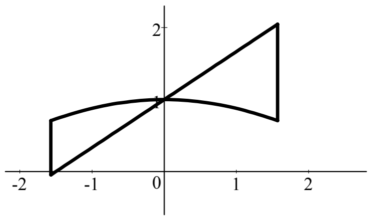
$= \boxed{\text{risostituendo } t = 1-2x^3:} = -\dfrac{1}{9}\sqrt{(1-2x^3)^3} + c$

4. La funzione $f(x) = \cos\frac{x}{2}$, sul dominio $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ha per grafico un arco di cosinusoide che presenta un punto di massimo in $x = 0$, punto in cui la funzione vale 1. Essendo la funzione pari, il grafico è simmetrico rispetto all'asse y. Negli estremi si ha $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

La funzione $g(x) = 1 + \dfrac{2}{3}x$, sul dominio $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ha per grafico un segmento di retta. È una funzione crescente e in $x = 0$ vale 1 mentre si ha $g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 - \dfrac{\pi}{3}$, $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 + \dfrac{\pi}{3}$.

Sicuramente i due grafici si intersecano nel punto di coordinate $(0, 1)$; che non ci siano altre intersezioni su $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ è ovvio poiché $g(x)$ è crescente mentre $f(x)$ è decrescente e quindi $f(x) < g(x)$.

Nell'intervallo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ invece risulta $g(x) < f(x)$. Infatti in ogni punto dell'intervallo $f'(x) = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$ è non maggiore di $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ che è minore di $\dfrac{2}{3}$. D'altra parte se i due grafici si intersecassero in un punto $(a, f(a))$, con $a \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$, per il teorema di Lagrange nell'intervallo $(a, 0)$ esisterebbe un punto c in cui $f'(c) = \dfrac{2}{3}$: impossibile!



Dunque la regione R da prendere in esame è quella delimitata in figura dalla linea più spessa, la cui area è data da
$\mathcal{A}(R) = \int\limits_{-\pi/2}^{0} (f(x) - g(x))\, dx + \int\limits_{0}^{\pi/2} (g(x) - f(x))\, dx.$
Si devono dunque calcolare l'integrale indefinito
$\int (f(x) - g(x)) dx = \int \left(\cos\frac{x}{2} - 1 - \frac{2}{3}x\right) dx = 2\sin\frac{x}{2} - x - \frac{1}{3}x^2 + c$
e il suo opposto e risulta

$$\mathcal{A}(R) = \left[2\sin\tfrac{x}{2} - x - \tfrac{1}{3}x^2\right]_{-\pi/2}^{0} - \left[2\sin\tfrac{x}{2} - x - \tfrac{1}{3}x^2\right]_{0}^{\pi/2} = -\left[-\sqrt{2} + \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi^2}{12}\right] - \left[\sqrt{2} - \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi^2}{12}\right] =$$
$$= \boxed{\tfrac{1}{6}\pi^2} \approx 1.6449$$

In realtà l'area della regione può essere più facilmente determinata osservando che, essendo l'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e il grafico di $f(x)$ simmetrici rispetto all'asse y, ribaltando rispetto a tale asse la parte di figura alla sua sinistra si ottiene un triangolo con base pari a $g\left(\frac{\pi}{2}\right) - g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ e altezza $\frac{\pi}{2}$ che quindi ha area $\frac{1}{6}\pi^2$.

(a) La funzione $f(t) = \dfrac{\ln t}{4t^2}$ è definita e continua sull'intervallo $(0, +\infty)$, in quanto rapporto della funzione $\ln t$ che su tale intervallo è definita e continua con la funzione $4t^2$ che in tale intevallo è ovviamente definita e continua (essendo un polinomio) e strettamente positiva e in particolare non nulla. Inoltre $f(t)$ ha il segno del numeratore, cioè è negativa in $(0, 1)$ e positiva in $(1, +\infty)$.

(b) Dato che $f(t)$ è in particolare continua sull'intervallo $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, ogni integrale della forma $\int\limits_{1/2}^{x} f(t) dt$, con $x > \frac{1}{2}$ è definito e quindi l'integrale $\int\limits_{1/2}^{+\infty} f(t) dt$ è improprio di prima specie. Osserviamo che

- $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t / 4t^2}{1/t^{3/2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{4t^{1/2}} = 0$, in quanto per $t \to +\infty$ la funzione $\ln t$ è infinito di ordine inferiore rispetto a qualunque potenza positiva di t
- sull'intervallo $(1, +\infty)$ entrambe le funzioni $f(t)$ e $\dfrac{1}{t^{3/2}}$ sono positive
- $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt = \lim_{x\to+\infty} \int_{1}^{x} \frac{dt}{t^{3/2}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\left[-\frac{2}{t^{1/2}}\right]_{1}^{x}\right) = 2$ converge:

quindi, per la generalizzazione del criterio del confronto asintotico, anche $\int\limits_{1}^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.

Poiché $\int\limits_{1/2}^{+\infty} f(t)\, dt = \int\limits_{1/2}^{1} f(t)\, dt + \int\limits_{1}^{+\infty} f(t)\, dt$ è somma di un integrale definito e di un integrale improprio convergente, esso risulta convergente.

(c) In realtà l'integrale improprio può essere facilmente calcolato. L'integrale indefinito corrispondente si calcola per parti con fattor finito $\ln t$:

$$\int \frac{\ln t}{4t^2} dt = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{t}\ln t - \int\left(-\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{t}\right) dt\right) = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{t}\ln t - \frac{1}{t}\right) + c$$

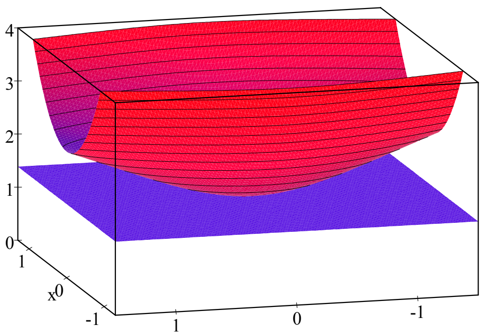
Ne segue che: $\displaystyle\int_{1/2}^{x} f(t)\, dt = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x}(1 + \ln x) + 2\left(1 + \ln\frac{1}{2}\right)\right)$ e quindi

$$\int_{1/2}^{+\infty} f(t)\, dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}\left(-\frac{1 + \ln x}{x} + 2(1 - \ln 2)\right) = \boxed{\frac{1}{2}(1 - \ln 2)}.$$

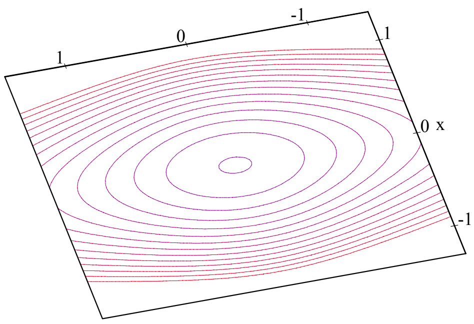
5. Osserviamo che la funzione di due variabili $f(x,y) = 2x^2 + \ln(3y^2+4)$ è definita in ogni punto del piano. Inoltre ha derivate parziali $f_x(x,y) = 4x$ e $f_y(x,y) = \dfrac{6y}{3y^2+4}$ continue in ogni punto del piano. Dunque i suoi punti critici sono quelli le cui coordinate annullano il gradiente **grad** $(f(x,y)) = (f_x(x,y)\,,f_y(x,y))$, cioè le soluzioni del sistema: $\begin{cases} 4x = 0 \\ \dfrac{6y}{3y^2+4} = 0 \end{cases}$

la cui unica soluzione è $\boxed{(0,0)}$: questo è il punto critico.

Tenuto conto che l'hessiano è $H(x,y) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \cdot \dfrac{3y^2+4-6y^2}{(3y^2+4)^2} \end{vmatrix} = 24 \cdot \dfrac{4-3y^2}{(3y^2+4)^2}$, si vede che $H(0,0) = 6 > 0$ ed, essendo $f_{xx}(0,0) = 4 > 0$, $\boxed{(0,0) \text{ è un punto di minimo locale}}$.



Le 2 figure sono ottenute considerando solo la parte di grafico contenuto tra i piani $x = -1.3$ e $x = 1.3$, $y = -1.5$ e $y = 1.5$, $z = 0$ e $z = 4$. La prima mostra il minimo (punto: $(0,0,\ln 4)$) con relativo piano tangente.



la seconda fornisce la proiezione in piano con le curve di livello: il punto di minimo è al centro di una zona delimitata da curve chiuse.

Per quanto riguarda la funzione $g(x,y) = 2x^2 + \ln(3y^2-4)$ osserviamo invece che è definita solo nei punti (x,y) del piano con $3y^2-4 > 0$, cioè in $E = \mathbb{R} \times \left\{ \left(-\infty, -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right) \right\}$.
La sua derivata parziale rispetto a y è la funzione $g_y(x,y) = \dfrac{6y}{3y^2-4}$ che non si annulla mai nell'insieme di definizione di $g(x,y)$. Dunque il vettore **grad** $(g(x,y)) = (g_x(x,y)\,,g_y(x,y))$ non si annulla mai in E, per cui la funzione non ha punti critici.

6. $y' = \dfrac{ty}{3t^2+1} - t$ è un'equazione differenziale del I ordine lineare completa, i cui coefficienti, $\dfrac{t}{3t^2+1}$ e t, sono funzioni continue su tutto l'asse reale.

   (a) Risolviamo l'equazione omogenea associata: $z' = \dfrac{tz}{3t^2+1}$ che risulta a variabili separabili e oltre alla soluzione nulla ha soluzioni che si possono ricavare risolvendo l'equazione integrale $\displaystyle\int \frac{dz}{z} = \int \frac{tdt}{3t^2+1}$.

Risulta $\ln|z| = \dfrac{1}{6}\ln|3t^2+1| + k$ (con $k \in \mathbb{R}$) cioè $\ln|z| = k + \ln(3t^2+1)^{\frac{1}{6}}$ e quindi $|z| = e^k\,(3t^2+1)^{\frac{1}{6}}$ cioè, tenuto conto anche della soluzione nulla, $z = c\,(3t^2+1)^{\frac{1}{6}}$ (con $c \in \mathbb{R}$).

Ora, utilizzando il metodo di variazione delle costanti, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione assegnata, della forma $\overline{y}(t) = c(t)\,(3t^2+1)^{\frac{1}{6}}$.

Risulta $\overline{y}'(t) = c'(t)\,(3t^2+1)^{\frac{1}{6}} + c(t)\cdot t\,(3t^2+1)^{-\frac{5}{6}}$. Sostituendo nell'equazione assegnata si trova $c'(t)\,(3t^2+1)^{\frac{1}{6}} + c(t)\cdot t\,(3t^2+1)^{-\frac{5}{6}} = \dfrac{t\cdot c(t)\,(3t^2+1)^{\frac{1}{6}}}{3t^2+1} - t$ cioè $c'(t)\,(3t^2+1)^{\frac{1}{6}} = -t$ o anche $c'(t) = -\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{6t}{(3t^2+1)^{\frac{1}{6}}}$ cioè, integrando, $c(t) = -\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{6}{5}\,(3t^2+1)^{\frac{5}{6}}$.

Dunque una soluzione particolare ha la forma $\overline{y}(t) = -\dfrac{1}{5}\,(3t^2+1)$ e l'<u>integrale generale</u> è $\boxed{y(t) = -\dfrac{1}{5}\,(3t^2+1) + c\,(3t^2+1)^{\frac{1}{6}}}$.

(b) Perché la funzione soluzione $y(t)$ soddisfi la condizione iniziale $y(0) = 2$, basta che sia $2 = -\dfrac{1}{5} + c$ cioè $c = \dfrac{11}{5}$. Quindi la <u>soluzione del problema di Cauchy</u> proposto è la funzione $\boxed{y(t) = -\dfrac{1}{5}\,(3t^2+1) + \dfrac{11}{5}\,(3t^2+1)^{\frac{1}{6}}}$.

7. Al sistema lineare $\begin{cases} kx - z = 2 \\ 2x + (k-1)\,y - (k+1)\,z = 4 \\ -\frac{1}{2}x + \left(k - \frac{1}{2}\right) z = -1 \end{cases}$ è associata la matrice completa

$(A \mid \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 & 2 \\ 2 & k-1 & -(k+1) & 4 \\ -\frac{1}{2} & 0 & k-\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$. La matrice A dei coefficienti (contenendo elementi sicuramente non nulli) ha per ogni valore reale di k rango compreso tra 1 e 3 (ordine della matrice). Risulta

$$\begin{vmatrix} k & 0 & -1 \\ 2 & k-1 & -(k+1) \\ -\frac{1}{2} & 0 & k-\frac{1}{2} \end{vmatrix} = (k-1)\begin{vmatrix} k & -1 \\ -\frac{1}{2} & k-\frac{1}{2} \end{vmatrix} = (k-1)\left(k^2 - \tfrac{1}{2}k - \tfrac{1}{2}\right) = (k-1)^2\left(k + \tfrac{1}{2}\right).$$

Quindi se k è diverso da 1 e da $-\frac{1}{2}$ la matrice A ha determinante non nullo e quindi ha rango massimo cioè 3 e la matrice completa pure (visto che non può avere rango superiore, avendo solo 3 righe): per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è <u>risolubile</u>.

$\boxed{\text{Se } k = 1}$ la matrice $(A \mid \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$ ha tutte le righe multiple della prima: quindi tanto la matrice dei coefficienti che la matrice completa hanno rango 1: quindi il sistema è <u>risolubile</u>.

$\boxed{\text{Se } k = -\frac{1}{2}}$ la matrice $(A \mid \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 4 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ha le ultime tre colonne palesemente indipendenti (se non lo si vede basta calcolare il determinante di tale sottomatrice: si trova $\frac{9}{2}$) e quindi ha rango 3, mentre la matrice dei coefficienti, corrispondente alle prime tre colonne ha rango 2 (sono uguali la prima e l'ultima riga): quindi il sistema <u>non è risolubile</u>.