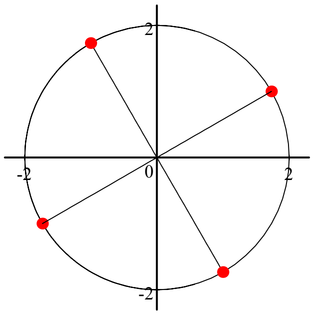
Soluzioni del compito di Istituzioni di Matematiche per Chimica (16/6/09)

1. Il numero complesso $z = 8\sqrt{3}i - 8$ ha parte reale -8 e parte immaginaria $8\sqrt{3}$, quindi ha modulo $|z| = 16$ e argomento $\arg z = \frac{2\pi}{3}$ (essendo $-\frac{1}{2}$ il suo coseno ed essendo $\operatorname{Im} z > 0$). Dunque le sue radici quarte hanno modulo 2 e argomento $\frac{1}{4}\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$, con $k \in \{-2, -1, 0, 1\}$, cioè, al variare di $k \in \{-2, -1, 0, 1\}$, hanno la forma trigonometrica:



$$w_k = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

e quindi

$\boxed{w_0 = \sqrt{3} + i = -w_{-2}}$, $\boxed{w_1 = -1 + i\sqrt{3} = -w_{-1}}$.

2. La funzione $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x(x+1)}\right)$

(a) è definita purché $\frac{x-1}{x(x+1)} > 0$ cioè in $E = (-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

Inoltre, $f(x) \geq 0$ se e solo se $\frac{x-1}{x(x+1)} \geq 1$ cioè $\frac{-x^2-1}{x(x+1)} \geq 0$: visto che il numeratore di tale frazione è sempre negativo, $f(x)$ non si annulla mai ed è positiva in $(-1, 0)$ e negativa in $(1, +\infty)$.

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \ln\left(\frac{2}{(x+1)}\right) = +\infty$; quindi per $x \to -1^+$ c'è un $\boxed{\text{asintoto verticale}}$ di equazione $x = -1$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \ln\left(\frac{-1}{x}\right) = +\infty$; quindi per $x \to 0^-$ c'è un $\boxed{\text{asintoto verticale: } x = 0}$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \ln\left(\frac{x-1}{2}\right) = -\infty$; quindi per $x \to -1^+$ c'è un $\boxed{\text{asintoto verticale: } x = 1}$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} -\ln(x) = -\infty$; non c'è asintoto proprio perché, per $x \to +\infty$, la funzione è asintotica all'opposto del logaritmo, che non ha asintoti.

(b) $f'(x) = \frac{x(x+1)}{x-1} \cdot \frac{x(x+1) - (x-1)(2x+1)}{(x(x+1))^2} = \frac{-x^2+2x+1}{x(x^2-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in E \\ -x^2+2x+1 \geq 0 \end{cases}$

(visto che nell'insieme di definizione il denominatore è sempre positivo) cioè

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty) \\ x \in \left[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[1-\sqrt{2}, 0\right)$ oppure $x \in \left(1, 1+\sqrt{2}\right]$

Ne segue che la funzione cresce negli intervalli $\left(1-\sqrt{2}, 0\right)$, e $\left(1, 1+\sqrt{2}\right)$ mentre decresce negli intervalli $\left(-1, 1-\sqrt{2}\right)$ e $\left(1+\sqrt{2}, +\infty\right)$; in $x = 1-\sqrt{2}$ ha un punto di minimo relativo; in $x = 1+\sqrt{2}$ ha un punto di massimo relativo. Si ha

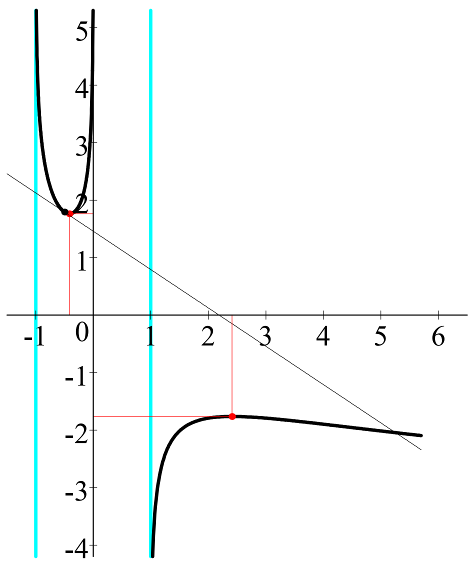
$$f(1-\sqrt{2}) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)(2-\sqrt{2})}\right) = \ln\left(\frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2}\right) = 2\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

$$f\left(1+\sqrt{2}\right)=\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}\right)=-2\ln\left(\sqrt{2}+1\right).$$

(c) Nel punto di ascissa $-\frac{1}{2}$ si ha

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\ln\left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\right)=\ln 6$ e $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\dfrac{-\frac{1}{4}-1+1}{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-1\right)}=-\dfrac{2}{3}$. Dunque la retta tangente al grafico nel punto $\left(-\frac{1}{2},\ln 6\right)$ ha equazione $y-\ln 6=-\dfrac{2}{3}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$.

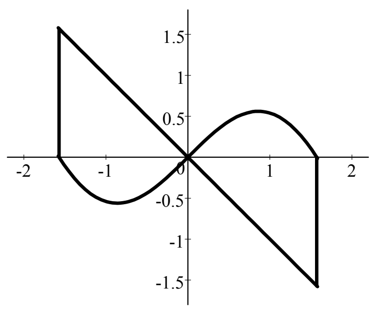
(d) Nel sottostante grafico di $\ln\left(\dfrac{x-1}{x\,(x+1)}\right)$, sono evidenziati gli asintoti verticali, la tangente, il punto di massimo e quello di minimo relativo.



Poiché $x=1+\sqrt{2}$ è un punto di massimo relativo, esiste un intorno (a,b) di tale punto, con $a>1$ e $b>1+\sqrt{2}$ tale che in esso la funzione sia concava.
Poiché per $x\to+\infty$ la funzione è asintotica a $-\ln x$ non può esistere alcun intervallo del tipo $(c,+\infty)$ su cui la funzione sia concava. Quindi nell'intervallo $(1,+\infty)$ si verifica almeno un cambiamento di concavità, per cui sicuramente in questo intervallo c'è almeno un punto di flesso.

3. $\displaystyle\int xe^{x^2-1}dx=\boxed{\text{per sostituzione immediata: } x^2-1=t;\ 2xdx=dt}=\int\tfrac{1}{2}e^t dt=\tfrac{1}{2}e^{x^2-1}+c$

4. Ciascuna delle funzioni in esame è dispari ($f(-x)=-f(x)$ e $g(-x)=-g(x)$) e ha quindi grafico simmetrico rispetto all'origine; inoltre si annullano in $x=0$. Poiché nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ la funzione coseno è non negativa, la funzione $f(x)=x\cos x$ è negativa nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ ove invece $g(x)=-x$ è positiva; simmetricamente, in $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ la funzione $f(x)=x\cos x$ è positiva e $g(x)=-x$ è negativa.
Inoltre si ha $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e $g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}=-g\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Quindi i due grafici si intersecano solo nell'origine e nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$ risulta $f(x)<0<g(x)$ mentre nell'intervallo $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ risulta $g(x)<0<f(x)$. Anche senza condurre uno studio più approfondito di $f(x)$, tenuto conto che la funzione $g(x)=-x$, nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ha per grafico un segmento della bisettrice del II-IV quadrante, si vede che la regione R da prendere in esame è quella delimitata in figura dalla linea più spessa.



Essa è simmetrica rispetto all'origine: quindi la sua area è data da $\mathcal{A}(R)=2\int\limits_0^{\pi/2}(f(x)-g(x))\,dx$.

Si deve dunque calcolare l'integrale indefinito

$$\int (f(x)-g(x))dx = \int (x\cos x + x)\, dx = \frac{x^2}{2} + x\sin x - \int \sin x dx = \frac{x^2}{2} + x\sin x + \cos x + c$$

e risulta

$$\mathcal{A}(R) = 2\left[\frac{x^2}{2} + x\sin x + \cos x\right]_0^{\pi/2} = 2\left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0 - 1\right) = \frac{\pi^2}{4} + \pi - 2 \approx 3.609.$$

5. (a) Perché sia definito il numeratore della funzione $f(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{(1+t^2)\ln(1+2t)}$ deve risultare $t \in [0,+\infty)$. Al denominatore il fattore $(1+t^2)$ è ≥ 1 ed in particolare non si annulla mai; invece $\ln(1+2t)$ che è sicuramente definito se $t \in [0,+\infty)$ si annulla per $t = 0$: quindi l'insieme di definizione di $f(t)$ è $(0,+\infty)$ e visto che in tale intervallo tutti i fattori sono continui e positivi (e quindi, in particolare, mai nulli) si vede che la funzione ove è definita è continua e positiva.

   (b) Per t che tende a 0 risulta $f(t) \sim \dfrac{\sqrt{t}}{(1)^2\left[\ln(1+t)\right]} \sim \dfrac{\sqrt{t}}{t} = \dfrac{1}{t^{1/2}}$

   per t che tende a $+\infty$ risulta $f(t) \sim \dfrac{\sqrt{t}}{t^2\left[\ln 2t\right]} = \dfrac{1}{t^{3/2}\left[\ln 2t\right]}$

   (c) Dato che $f(t)$ è continua sull'intervallo $(0,+\infty)$, ogni integrale della forma $\int_a^b f(t)\, dt$, con $0 < a < b$ è definito, ma visto che per t che tende a 0 la funzione $f(t)$ diverge, l'integrale $\int_{0^+}^{+\infty} f(t)\, dt$ è improprio contemporaneamente di prima e di seconda specie. Bisogna quindi studiare separatamente i due integrali impropri $\int_{0^+}^{z} f(t)\, dt$ e $\int_{z}^{+\infty} f(t)\, dt$, con z reale fissato qualsiasi purché positivo. Visto che la funzione è positiva su ciascuno dei due intervalli, per stabilire se i due integrali impropri convergono si può usare un criterio di convergenza, ad esempio quello di confronto asintotico o la sua generalizzazione. Osserviamo che

   per $t \to 0^+$ si ha $f(t) \sim \dfrac{1}{t^{1/2}}$ e $\displaystyle\int_{0^+}^{z} \frac{1}{t^{1/2}} dt = \lim_{a\to 0^+} \int_a^z \frac{dt}{t^{1/2}} = \lim_{a\to 0^+} \left[2t^{1/2}\right]_a^z = 2z^{1/2}$ converge:

   quindi per il criterio del confronto asintotico anche $\int_{0^+}^{z} f(t)\, dt$ converge. Inoltre:

   - per $t \to +\infty$ si ha $f(t) \sim \dfrac{1}{t^{3/2}\left[\ln 2t\right]}$ e $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{t^{3/2}[\ln 2t]}}{\frac{1}{t^{3/2}}} = 0$, cioè per $t \to +\infty$ la funzione

   $f(t)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $\dfrac{1}{t^{3/2}}$

   - $\displaystyle\int_z^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt = \lim_{b\to+\infty} \int_z^b \frac{dt}{t^{3/2}} = \lim_{b\to+\infty} \left(\left[-\frac{2}{t^{1/2}}\right]_z^b\right) = \frac{2}{z^{1/2}}$ converge:

   quindi per il criterio del confronto asintotico generalizzato anche $\int_{z}^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.

   Poiché $\int_{0^+}^{+\infty} f(t)\, dt = \int_{0^+}^{z} f(t)\, dt + \int_{z}^{+\infty} f(t)\, dt$ è somma di due integrali impropri convergenti, esso risulta convergente.

6. La funzione di due variabili $f(x,y) = x^3 - xy^2 - x + y$ ha derivate parziali $f_x(x,y) = 3x^2 - y^2 - 1$ e $f_y(x,y) = -2xy + 1$. I suoi punti critici sono quelli le cui coordinate annullano il gradiente $\mathbf{grad}\,(f(x,y)) = (f_x(x,y)\,, f_y(x,y))$, cioè le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ -2xy + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2x} \\ 3x^2 - \dfrac{1}{4x^2} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2x} \\ 12x^4 - 4x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2x} \\ x^2 = \dfrac{2 \pm \sqrt{16}}{12} \end{cases}$$

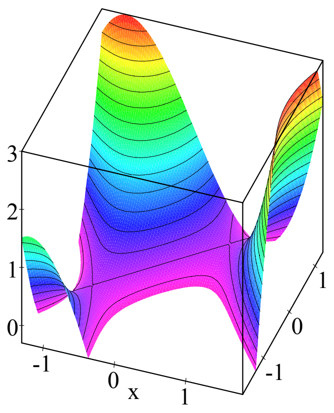
che porta a due sole soluzioni reali: $\begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ e $\begin{cases} y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

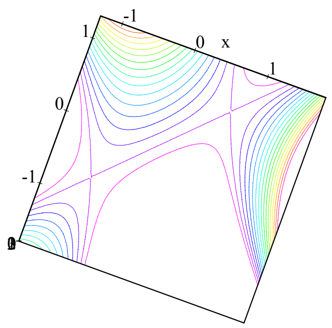
Quindi ci sono solo due punti critici $\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$.

L'hessiano è

$H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & -2y \\ -2y & -2x \end{vmatrix} = -4\left[3x^2 + y^2\right]$ e quindi al di fuori dell'origine è sempre negativo.

In particolare i punti critici (in cui $H(x,y)$ vale -8) risultano quindi entrambi $\boxed{\text{punti di sella}}$.





Le 2 figure sono ottenute considerando solo la parte di grafico contenuto tra i piani $x = -1.3$ e $x = 1.8$, $y = -1.8$ e $y = 1.3$, $z = -0.3$ e $z = 3$. La prima mostra le due selle (punti: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$); la seconda fornisce la proiezione del grafico sul piano xy ed evidenzia le curve di livello.

Le due selle giacciono proprio nel piano xy che è il piano in esse tangente al grafico: quindi coincidono con i punti di sella che stanno dunque sulla curva di livello di equazioni

$$\begin{cases} z = x^3 - xy^2 - x + y \\ z = 0 \end{cases}$$

Essa (letta come una curva del piano xy) ha equazione $(y - x)\,(x^2 + xy - 1) = 0$ e quindi è unione tra la retta di eq. $y = x$ e l'iperbole di eq. $x^2 + xy = 1$ che si intersecano proprio nei punti di sella.

7. $y' = 3y^2\sqrt{1-t}$ è un'equazione differenziale del I ordine a variabili separabili, prodotto di una funzione in t continua in $(-\infty, 1]$ e di un polinomio in y (continuo su tutto l'asse reale).

   (a) Quest'equazione ammette la soluzione costante: $y\,(t) = 0$ e l'integrale generale si può ricavare risolvendo l'equazione integrale $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2} = 3\int \sqrt{1-t}\,dt$.

   Risulta, integrando:

   $$-\frac{1}{y} = -2\,(1-t)^{3/2} - c \text{ (con } c \in \mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} = 2\,(1-t)^{3/2} + c.$$

Risolvendo rispetto a y quest'ultima uguaglianza, si ricava l'integrale generale $\boxed{y(t) = \dfrac{1}{2\,(1-t)^{3/2} + c}}$ (con $c \in \mathbb{R}$).
Le funzioni di questo tipo sono soluzioni (cioè sono derivabili e soddisfano l'equazione differenziale) purché il denominatore sia diverso da 0, quindi per ogni $t \in (-\infty, 1]$ reale se $c > 0$ mentre se $c \leq 0$ solo se $t \neq 1 - \left(\frac{-c}{2}\right)^{2/3}$.

(b) L'unica soluzione $y(t)$ che soddisfi la condizione iniziale $y(0) = 0$, è la soluzione costante $y\,(t) = 0$. Invece perché sia $y(0) = 2$ basta che sia $\dfrac{1}{2} = 2\,(1-0)^{3/2} + c$ cioè $c = -\dfrac{3}{2}$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy proposto è la funzione $\boxed{y(t) = \dfrac{2}{4\,(1-t)^{3/2} - 3}}$.

8. Un vettore di $\mathbb{R}^3$ ortogonale a $\mathbf{u} = (3,4,0)$ e $\mathbf{v} = (-3,0,1)$ è, ad esempio, il prodotto vettoriale dei due

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4, -3, 12).$$

I vettori ortogonali a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ hanno tutti la stessa direzione: quindi sono tutti e soli i multipli di $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$: $(4h, -3h, 12h)$, con $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Essi hanno modulo $\sqrt{(4h)^2 + (-3h)^2 + (12h)^2} = 13\,|h|$: tale modulo è 1 per $h = \pm\dfrac{1}{13}$.
Inoltre ciascuno di essi forma con il vettore $(0,1,0)$ un angolo avente coseno $\dfrac{-3h}{13\,|h|}$: l'angolo è ottuso se e solo se tale coseno è negativo, cioè se e solo se $h > 0$.
Dunque il vettore $\mathbf{w}$ cercato è $\boxed{\left(\dfrac{4}{13}, -\dfrac{3}{13}, \dfrac{12}{13}\right)}$.