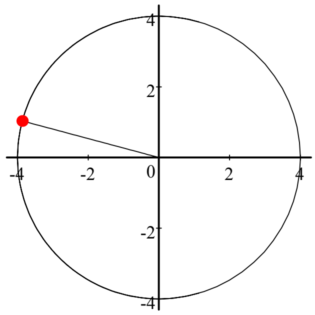
Soluzioni del compito di Istituzioni di Matematiche per Chimica (22/9/09)

1. Il numero complesso $\dfrac{4\sqrt{3}i-4}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}$ ha

- al numeratore il numero complesso $z = 4\sqrt{3}i - 4$ che ha modulo 8 e argomento principale $\frac{2}{3}\pi$ (poiché il suo coseno è $-\frac{1}{2}$ e il suo seno è $\frac{\sqrt{3}}{2}$)
- al denominatore il numero complesso $w = \sqrt{2}-\sqrt{2}i$ che ha modulo 2 e argomento principale $-\frac{1}{4}\pi$ (poiché il suo coseno è $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e il suo seno è $-\frac{\sqrt{2}}{2}$)

Dunque: $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|} = 4$ mentre un argomento di $\dfrac{z}{w}$ è dato dalla differenza dei due argomenti: $\frac{2}{3}\pi - \left(-\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{11}{12}\pi$.

Ne segue che il numero complesso ha la seguente rappresentazione sul piano di Argand-Gauss



2. La funzione $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{2-x}}$

(a) è definita purché il denominatore sia non nullo e il radicando non sia negativo, cioè in $E = (-\infty, 2)$.
$f(x)$ si annulla se e solo se $x = 0$ mentre in tutti gli altri punti dell'insieme di definizione è positiva .
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{4}{\sqrt{2-x}} = +\infty$; quindi per $x \to 2^-$ c'è un $\boxed{\text{asintoto verticale}}$ di equazione $x = 2$.
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{-x}} = \lim\limits_{x\to -\infty} (-x)^{3/2} = +\infty$; ma non cè asintotoi per $x \to -\infty$ poiché la funzione tende all'infinito come una potenza di esponente masggiore di 1.

(b) Osserviamo che $\left(\sqrt{2-x}\right)' = -\frac{1}{2}(2-x)^{-1/2}$: dunque

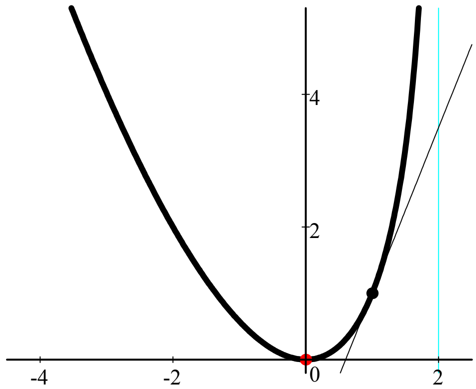
$$f'(x) = \frac{2x(2-x)^{1/2} + \frac{1}{2}x^2(2-x)^{-1/2}}{(2-x)} = \frac{4x(2-x)+x^2}{2(2-x)^{3/2}} = \frac{-3x^2+8x}{2(2-x)^{3/2}}$$

L'insieme di definizione E' della derivata coincide con E; il denominatore di f' è sempre positivo su E' quindi $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{8}{3}\right) \cap E$ cioè $x \in (0, 2)$
Ne segue che la funzione cresce nell'intervallo $(0, 2)$, mentre decresce nell'intervalli $(-\infty, 0)$ e $\boxed{\text{in } x = 0 \text{ ha un punto di minimo relativo}}$ e assoluto.

(c) $$f''(x) = \frac{(-6x+8)(2-x)^{3/2} + \frac{3}{2}(-3x^2+8x)(2-x)^{1/2}}{2(2-x)^3} =$$
$$= \frac{2(-6x+8)(2-x) + 3(-3x^2+8x)}{4(2-x)^{5/2}} = \frac{3x^2-16x+32}{4(2-x)^{5/2}} > 0$$ in tutto E: quindi la funzione è convessa su tutto il suo insieme di definizione

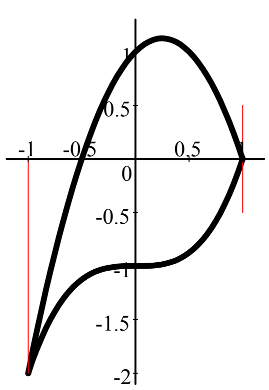
(d) Nel punto di ascissa 1 la derivata la funzione vale $f(1) = 1$, mentre la derivata vale $f'(1) = \frac{5}{2}$
Quindi la retta tangente al grafico nel punto $(1, 1)$ ha equazione $y = 1 + \frac{5}{2}(x - 1)$.

(e) Nel successivo grafico di $\dfrac{x^2}{\sqrt{2-x}}$ sono evidenziati l'asintoto verticale, la tangente in $(1, 1)$, il minimo relativo.



3. La funzione è definita e continua in ciascuno dei due intervalli $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$ e $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$, che sono disgiunti: questo è il motivo per ricercare le primitive sui singoli intervalli, in particolare sul secondo.
$$\int x \ln\left(4x^2 - 1\right) dx = \boxed{\begin{array}{l}\text{per sostituzione immediata:}\\ 4x^2 - 1 = t;\ 8x dx = dt\end{array}} = \int \frac{1}{8} \ln t dt = \frac{1}{8}\left(t \ln t - \int t \cdot \frac{1}{t} dt\right) =$$
$$= \frac{t\left[(\ln t) - 1\right]}{8} + c = \frac{\left(4x^2 - 1\right)\left[\ln\left(4x^2 - 1\right) - 1\right]}{8} + c$$

4. La funzione $f(x) = x^3 - 1$ è crescente; ha grafico passa per il punto $(0, -1)$ dove ha un flesso e negli estremi dell'intervallo $[-1, 1]$ assume rispettivamente i valori $f(-1) = -2$ e $f(1) = 0$. Invece $g(x) = -2x^2 + x + 1$ ha per grafico una parabola concava con asse $x = -\frac{1}{4}$ e negli estremi dell'intervallo $[-1, 1]$ assume gli stessi valori della funzione f: $g(-1) = -2$ e $g(1) = 0$. I due grafici si intersecano quando $f(x) = g(x)$, cioè $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$; due soluzioni sono già note: $x = -1$ e $x = 1$; la restante $(x = -2)$ cade al di fuori dell'intervallo considerato; inoltre $f(x) > g(x)$ negli intervalli $(-2, -1)$ e $(1, +\infty)$ mentre negli intervalli $(-\infty, -2)$ e $(-1, 1)$ risulta $f(x) < g(x)$.



Quindi la regione R da prendere in esame è quella delimitata in figura dalla linea più spessa e la sua area è data da $\mathcal{A}(R) = \int_{-1}^{1} (g(x) - f(x))\, dx$.
Si deve dunque calcolare l'integrale indefinito
$$\int (g(x) - f(x)) dx = \int \left(2 + x - 2x^2 - x^3\right) dx =$$
$$= 2x + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + c$$

e risulta $\mathcal{A}(R) = \left[2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{1} = 2 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}\right) = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

5. .

(a) Il numeratore della funzione $f(t) = \dfrac{\sqrt[3]{t}}{\ln(1+3t)}$ è sempre definito. Il denominatore lo è purché sia $1+3t>0$; perché sia definita la frazione deve risultare $1+3t \neq 1$; dovendo valere tutte e tre le condizioni, l'insieme di definizione di $f(t)$ è $\left(-\frac{1}{3},0\right) \cup (0,+\infty)$. Su ciascuno dei due intervalli su cui la funzione è definita i fattori sono continui: quindi la funzione ove è definita è continua; inoltre è anche positiva su entrambi poiché numeratore e denominatore hanno segno concorde.

(b) Per t che tende a 0 risulta (vedi limiti notevoli): $f(t) \sim \dfrac{\sqrt[3]{t}}{3t} = \dfrac{1}{3t^{2/3}} = \dfrac{1}{3}t^{-2/3}$

(c) Dato che $f(t)$ è continua sull'intervallo $(0,+\infty)$, ogni integrale della forma $\int_a^b f(t)\,dt$, con $0<a<b$ è definito. L'integrale $\int_{10}^{+\infty} f(t)\,dt$ è ovviamente improprio di prima specie, mentre - visto che per t che tende a 0 la funzione $f(t)$ diverge - l'integrale $\int_{0^+}^{4} f(t)\,dt$ è improprio di seconda specie. L'integrale improprio di prima specie diverge poiché la funzione integranda è positiva e divergente (mentre condizione necessaria affinché una funzione positiva e dotata di limite abbia integrale improprio di prima specie convergente è che essa converga a zero). Per stabilire se l'altro integrale improprio converge si può usare il criterio di convergenza del confronto asintotico. Osserviamo che

per $t \to 0^+$ si ha $f(t) \sim \dfrac{1}{3t^{2/3}}$ e $\displaystyle\int_{0^+}^{4} \frac{1}{3t^{2/3}}dt = \lim_{a\to 0^+}\int_a^4 \frac{dt}{3t^{2/3}} = \lim_{a\to 0^+}\left[t^{1/3}\right]_a^4 = 4^{1/3}$

converge:

quindi per il criterio del confronto asintotico anche $\int_{0^+}^{4} f(t)\,dt$ converge.

6. La funzione di due variabili $f(x,y) = y\left(e^{x^2} - y - e\right)$ ha derivate parziali

$f_x(x,y) = 2xye^{x^2}$ e $f_y(x,y) = e^{x^2} - 2y - e$. I suoi punti critici sono quelli le cui coordinate annullano il gradiente $\mathbf{grad}\,(f(x,y)) = (f_x(x,y)\,,f_y(x,y))$, cioè le soluzioni del sistema:

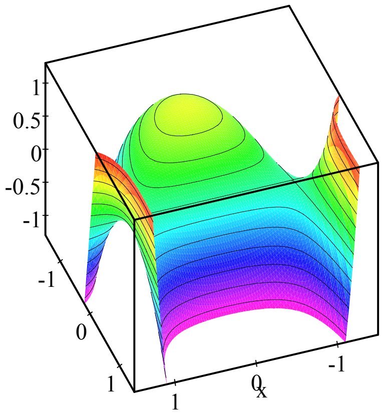
$$\begin{cases} 2xye^{x^2} = 0 \\ e^{x^2} - 2y - e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 - 2y - e = 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} y = 0 \\ e^{x^2} - e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

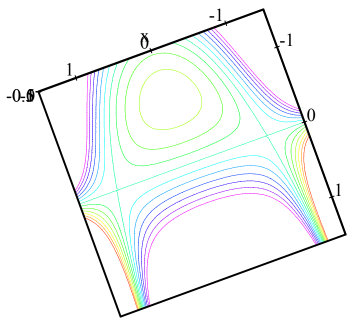
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1-e}{2} \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \text{ cioè i punti critici sono } \boxed{\left(0,\frac{1-e}{2}\right),(1,0),(-1,0)}.$$

L'hessiano è $H(x,y) = \begin{vmatrix} 2y\left(2x^2+1\right)e^{x^2} & 2xe^{x^2} \\ 2xe^{x^2} & -2 \end{vmatrix} = 4\left[-y\left(2x^2+1\right) - x^2e^{2x^2}\right]$;

poiché $H(\pm 1,0) = 4\left[0-e^2\right] < 0$, i punti $(1,0),(-1,0)$ sono $\boxed{\text{punti di sella}}$;

invece $H\left(0,\dfrac{1-e}{2}\right) = 4\left[\dfrac{e-1}{2}(0+1) - 0\right] > 0$, e dato che $f_{yy}\left(0,\dfrac{1-e}{2}\right) = -2$, il punto $\left(0,\dfrac{1-e}{2}\right)$ è un $\boxed{\text{massimo locale}}$.





Le 2 figure sono ottenute considerando solo la parte di grafico contenuto tra i piani $x = -1.5$ e $x = 1.5$, $y = -1.5$ e $y = 1.5$, $z = -1.3$ e $z = 1.3$. La prima mostra le due selle (punti: $(1,0,0)$, $(-1,0,0)$) e il massimo: $\left(0, \frac{1-e}{2}, \left(\frac{1-e}{2}\right)^2\right)$ locale.
La seconda fornisce la proiezione del grafico sul piano xy ed evidenzia le curve di livello.
Le due selle giacciono proprio nel piano xy che è il piano in esse tangente al grafico: quindi coincidono con i punti di sella che stanno dunque sulla curva di livello di equazioni

$$\begin{cases} z = y\left(e^{x^2} - y - e\right) \\ z = 0 \end{cases}$$

Essa (letta come una curva del piano xy) ha equazione $y\left(e^{x^2} - y - e\right) = 0$ e quindi è unione tra la retta di eq. $y = x$ e l'esponenziale di equazione $y = e^{x^2} - e$ che si intersecano proprio nei punti di sella.

7. $y' = \frac{y}{\tan t} + (\sin t)^3$ è un'equazione differenziale del I ordine lineare completa, i cui coefficienti, $\frac{1}{\tan t}$ e $(\sin t)^3$, sono funzioni, la seconda continua su tutto l'asse reale, la prima continua su ogni intervallo della forma $\left(k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}\right)$. Tra questi, l'intervallo di ampiezza massima che contiene $\frac{5\pi}{4}$ è $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ e quindi l'integrale generale che andremo a determinare sarà definito in tale intervallo.

   (a) Risolviamo l'equazione omogenea associata: $z' = \frac{z}{\tan t}$ che risulta a variabili separabili e oltre alla soluzione nulla ha soluzioni che si possono ricavare risolvendo l'equazione integrale $\int \frac{dz}{z} = \int \frac{\cos t dt}{\sin t}$.
   Risulta $\ln|z| = \ln|\sin t| + k$ (con $k \in \mathbb{R}$) e quindi $|z| = e^k |\sin t|$ cioè, tenuto conto anche della soluzione nulla, $z = c \sin t$ (con $c \in \mathbb{R}$).
   Ora, utilizzando il metodo di variazione delle costanti, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione assegnata, della forma $\overline{y}(t) = c(t)\sin t$.
   Risulta $\overline{y}'(t) = c'(t)\sin t + c(t)\cdot\cos t$. Sostituendo nell'equazione assegnata si trova $c'(t)\sin t + c(t)\cdot\cos t = \frac{c(t)\sin t}{\tan t} + (\sin t)^3$ cioè $c'(t)\sin t = (\sin t)^3$ o anche $c'(t) = (\sin t)^2$. Ricordando che $\cos 2t = 1 - 2(\sin t)^2$, tale equazione si riscrive nella forma $c'(t) = \frac{1-\cos 2t}{2}$, da cui, integrando, $c(t) = \frac{1}{2}\cdot\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + c = \frac{t - \sin t\cos t}{2} + c$.
   Dunque una soluzione particolare ha la forma $\overline{y}(t) = \frac{t\sin t - (\sin t)^2\cos t}{2}$ e l'integrale

generale è $\boxed{y(t) = \left(\dfrac{t - \sin t \cos t}{2} + c \right) \sin t}$.

(b) Perché la funzione soluzione $y(t)$ soddisfi la condizione iniziale $y\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = 0$, basta che sia $0 = \left(\dfrac{1}{2} \left(\dfrac{5\pi}{4} - \sin \dfrac{5\pi}{4} \cos \dfrac{5\pi}{4} \right) + c \right) \sin \dfrac{5\pi}{4}$ cioè $0 = \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{5\pi}{4} - \dfrac{1}{2} \right) + c$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy proposto è la funzione

$$\boxed{y(t) = \left(\frac{t - \sin t \cos t}{2} + \frac{2 - 5\pi}{8} \right) \sin t}.$$

8. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1+k & 1-2k \\ 1 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

ha rango ≥ 2 per ogni valore di k poiché la sottomatrice di ordine 2 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante diverso da zero. Si tratta quindi di vedere per quali valori il rango è esattamente 2 e per quali è 3. La matrice A è quadrata di ordine 3 e quindi ha una sola sottomatrice di ordine 3, lei stessa! Il suo determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1+k & 1-2k \\ 1 & 0 & -k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1+k & 1-2k \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1+k \end{vmatrix} = 2 - 4k + 1 + k - k - k^2 + 6k$$

si annulla se e solo se $3 + 2k - k^2 = 0$ cioè se e solo se $k = -1$ oppure $k = 3$.

Quindi per questi due valori il rango di A è 2, per tutti gli altri è 3.