Soluzioni del compito di Istituzioni di Matematiche/Matematica per Chimica F45 e F5X (26/1/10)

I testi sono in parte comuni ai due temi d'esame. Gli studenti del vecchio ordinamento hanno due domande in meno nei primi sette esercizi, ma hanno anche l'ottava domanda che non riguarda il nuovo ordinamento

1. La funzione $f(x) = \ln\left(\dfrac{|x|}{2x+3}\right) - \dfrac{2}{x}$

   (a) è definita purché l'argomento del logaritmo sia positivo cioè per $\begin{cases} x \neq 0 \\ 2x+3>0 \end{cases}$ e il denominatore della seconda frazione sia non nullo: quindi in $E = \left(-\frac{3}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$.
   $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}^+} \ln\left(\dfrac{\frac{3}{2}}{2x+3}\right) + \dfrac{2}{\frac{3}{2}} = +\infty$; quindi per $x \to -\frac{3}{2}^+$ c'è un $\boxed{\text{asintoto verticale}}$ di equazione $x = -\frac{3}{2}$.
   Poiché, $\lim\limits_{x\to 0^\pm} x \ln|x| = 0$,
   risulta $\lim\limits_{x\to 0^\pm} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^\pm} \ln|x| - \ln 3 - \dfrac{2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^\pm} -\ln 3 - \dfrac{2}{x}\left(1 - \dfrac{x}{2}\ln|x|\right) = \mp\infty$. Quindi per $x \to 0$ c'è un $\boxed{\text{asintoto verticale}}$ di equazione $x = 0$.
   $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{2}{x} = -\ln 2$; quindi per $x \to +\infty$ c'è un $\boxed{\text{asintoto orizzontale}}$ di equazione $y = -\ln 2$.

   (b) Osserviamo che $f(x) = \ln(|x|) - \ln(2x+3) - \dfrac{2}{x}$: dunque
   $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{2x+3} + \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{7x+6}{x^2(2x+3)}$.
   L'insieme di definizione E' della derivata coincide con E; il denominatore di f' è sempre positivo su E' quindi $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{6}{7}, +\infty\right) \cap E$ cioè per $x \in \left(-\frac{6}{7}, 0\right)$ e per $x \in (0, +\infty)$
   Ne segue che la funzione cresce nei due intervalli $\left(-\frac{6}{7}, 0\right)$ e $(0, +\infty)$, mentre decresce nell'intervallo $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{6}{7}\right)$ e $\boxed{\text{in } x = -\tfrac{6}{7} \text{ ha un punto di minimo relativo}}$.
   Si ha $f\left(-\frac{6}{7}\right) = \ln\left(\dfrac{\frac{6}{7}}{-\frac{12}{7}+3}\right) + \dfrac{2}{\frac{6}{7}} = \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{7}{3}$.

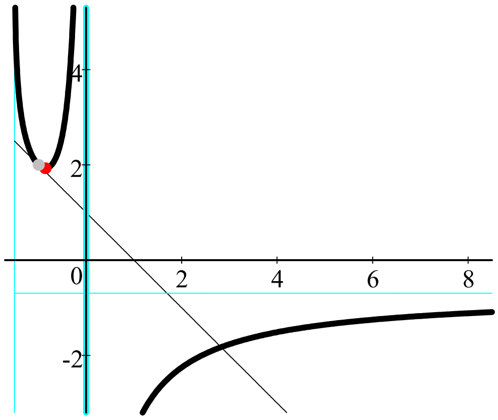
   (c) La funzione è positiva in $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ poiché su tale intervallo il minimo valore da essa assunto è $f\left(-\frac{6}{7}\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{7}{3} > 0$; invece in $(0, +\infty)$ la funzione è crescente ma i suoi valori sono sempre minori di $-\ln 2$ (visto che $y = -\ln 2$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$). Quindi in tale intervallo la funzione è negativa. Non ci sono zeri.

   (d) $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{(2x+3)^2} - \dfrac{4}{x^3} = -\dfrac{x(2x+3)^2 - 4x^3 + 4(2x+3)^2}{x^3(2x+3)^2} = -\dfrac{28x^2+57x+36}{x^3(2x+3)^2}$:
   poiché il discriminante di $28x^2+57x+36$ vale $57^2 - 4\cdot 28\cdot 36 = 3^2(19^2 - 4^2\cdot 28) < 0$ il numeratore è positivo in tutto E, mentre il denominatore è negativo in $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ quindi la funzione è convessa in $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ e concava in $(0, +\infty)$.

   (e) Nel punto di ascissa -1 la funzione vale $f(-1) = 2$, mentre la derivata vale $f'(-1) = -1$

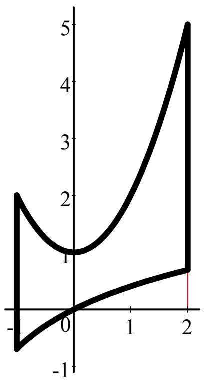
   Quindi la retta tangente al grafico nel punto $(-1, 2)$ ha equazione $y = 1 - x$.

(f) Nel successivo grafico di $\ln\left(\frac{|x|}{2x+3}\right)-\frac{2}{x}$ sono evidenziati gli asintoti verticali e quello orizzontale, la tangente in $(-1,2)$, il minimo relativo.



2. La funzione $\frac{\sin x}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$ è definita e continua su tutto l'asse reale.
Inoltre $\frac{\sin x}{\sin^2 x+2\cos^2 x}=\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$. Quindi
$\int\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\boxed{\begin{array}{l}\text{per sostituzione immediata:}\\ \cos x=t;\ -\sin x dx=dt\end{array}}=\int-\frac{1}{1+t^2}dt=-\arctan t+c=-\arctan(\cos x)+c$

3. La funzione $f(x)=\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)=\ln(x+2)-\ln 2$, in quanto traslata lungo l'asse x di 2 unità verso sinistra e lungo l'asse y di $\ln 2$ verso il basso, è crescente; il suo grafico passa per il punto $(0,0)$ dove ha tangente con coefficiente angolare $\frac{1}{2}$ e negli estremi dell'intervallo $[-1,2]$ assume rispettivamente il valore minimo $f(-1)=-\ln 2$ e il valore massimo $f(2)=\ln 2<1$.
Invece $g(x)=1+x^2$ ha per grafico una parabola convessa simmetrica rispetto all'asse y che negli estremi dell'intervallo $[-1,2]$ assume i valori $g(-1)=2$ e $g(2)=5$. Poiché il valore minimo assunto da $g(x)$ è $g(0)=1$, che è maggiore del valore massimo assunto sull'intervallo da $f(x)$, i due grafici non si intersecano in $[-1,2]$. Quindi si ha sempre $f(x)<g(x)$.



Quindi la regione R da prendere in esame è quella delimitata in figura dalla linea più spessa e la sua area è data da
$\mathcal{A}(R)=\int_{-1}^{2}(g(x)-f(x))\,dx$.
Si deve dunque calcolare l'integrale indefinito

$$\int(g(x)-f(x))dx=\int\left(1+x^2-\ln\left(1+\tfrac{x}{2}\right)\right)dx=$$
$$=x+\tfrac{1}{3}x^3-x\ln\left(1+\tfrac{x}{2}\right)+\int\frac{x}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)}dx=$$
$$=x+\tfrac{1}{3}x^3-x\ln\left(1+\tfrac{x}{2}\right)+x-2\ln(x+2)+c$$

e risulta

$$\mathcal{A}(R)=\left[2x+\tfrac{1}{3}x^3-x\ln\left(1+\tfrac{x}{2}\right)-2\ln(x+2)\right]_{-1}^{2}=4+\tfrac{8}{3}-6\ln 2+2+\tfrac{1}{3}+\ln 2=$$
$$=9-5\ln 2\approx 5.534$$

4.

(a) Il numeratore della funzione $f(t) = \dfrac{\ln t}{\sqrt{t^3+t}}$ è definito in $(0,+\infty)$. In tale insieme si ha certamente $t^3+t > 0$ e quindi risulta definita anche la frazione e il radicale a denominatore. Dunque l'insieme di definizione di $f(t)$ è $(0,+\infty)$. Su tale intervallo la funzione è continua poiché lo sono i suoi fattori; essa è positiva in $(1,+\infty)$ e negativa in $(0,1)$ poiché (essendo il denominatore sempre positivo) ha lo stesso segno di $\ln t$.

(b) Per t che tende a 0 risulta $f(t) \sim \dfrac{\ln t}{t^{1/2}}$; invece per t che tende a $+\infty$ risulta $f(t) \sim \dfrac{\ln t}{t^{3/2}}$.

Dato che $f(t)$ è continua sull'intervallo $(0,+\infty)$, ogni integrale della forma $\int_a^b f(t)\,dt$, con $0 < a < b$ è definito. Visto che $f(t)$ ha segno opposto sui due intervalli $(0,1)$ e $(1,+\infty)$ conviene vedere l'integrale $\int_{0^+}^{+\infty} f(t)\,dt$ come somma dei due integrali $\int_{0^+}^{1} f(t)\,dt$ e $\int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$.

L'integrale $\int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$ è improprio di prima specie, mentre - visto che per t che tende a 0 la funzione $f(t)$ diverge - l'integrale $\int_{0^+}^{1} f(t)\,dt$ è improprio di seconda specie.

Per stabilire se convergono usiamo il criterio del confronto asintotico

per $t \to +\infty$ si ha $f(t) \sim \dfrac{\ln t}{t^{3/2}}$ e

$$\int_1^{+\infty} t^{-3/2} \ln t dt = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b t^{-3/2} \ln t dt = \lim_{b\to+\infty} \left[-2t^{-1/2}\ln t - 4t^{-1/2}\right]_1^b = 4 \text{ converge:}$$

quindi per il criterio del confronto asintotico anche $\int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge;

per $t \to 0^+$ si ha $f(t) \sim \dfrac{\ln t}{t^{1/2}}$ e

$$\int_{0^+}^{1} t^{-1/2} \ln t dt = \lim_{a\to0^+} \int_a^1 t^{-1/2} \ln t dt = \lim_{a\to0^+} \left[2t^{1/2}\ln t - 4t^{1/2}\right]_a^1 = -4 \text{ converge:}$$

quindi per il criterio del confronto asintotico anche $\int_{0^+}^{1} f(t)\,dt$ converge.

Ne segue che anche la somma dei due integrali impropri converge.

5. La funzione di due variabili $f(x,y) = (e^x - x)\,y\ln y$, definita in $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$, ha derivate parziali $f_x(x,y) = (e^x-1)\,y\ln y$ e $f_y(x,y) = (e^x - x)\,(\ln y + 1)$.

I suoi punti critici sono quelli le cui coordinate annullano il gradiente

$\mathbf{grad}\,(f(x,y)) = (f_x(x,y)\,,f_y(x,y))$, cioè le soluzioni del sistema: $\begin{cases} (e^x-1)\,y\ln y = 0 \\ (e^x-x)\,(\ln y+1) = 0 \end{cases}$

Attenzione: per nessun valore reale di x si può avere $e^x = x$. Infatti, dato che la funzione e^x è convessa su tutto $\mathbb{R}$, il suo grafico giace tutto al di sopra della retta $y = x+1$ che è tangente al grafico stesso in $(0,1)$, e quindi $e^x \geq x+1 > x$ per ogni valore reale di x.

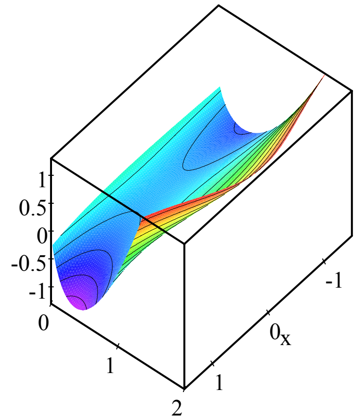
Quindi il sistema equivale a $\begin{cases} (e^x-1)\,y\ln y = 0 \\ \ln y + 1 = 0 \end{cases}$

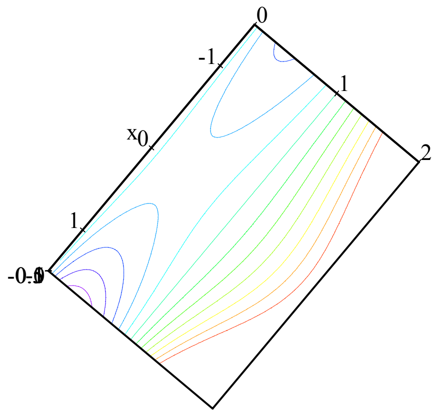
La seconda equazione significa $y = e^{-1}$: quindi $y\ln y \neq 0$.

Ne segue che il sistema equivale a $\begin{cases} e^x - 1 = 0 \\ y = e^{-1} \end{cases}$ cioè c'è un solo punto critico $\boxed{(0, e^{-1})}$.
In esso la funzione vale $-e^{-1}$.
L'hessiano

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} e^x y \ln y & (e^x - 1)(\ln y + 1) \\ (e^x - 1)(\ln y + 1) & \dfrac{(e^x - x)}{y} \end{vmatrix} = e^x (e^x - x) \ln y - [(e^x - 1)(\ln y + 1)]^2;$$

in $(0, e^{-1})$ vale $H(0, e^{-1}) = -1 < 0$: quindi il punto $(0, e^{-1})$ è un $\boxed{\text{punto di sella}}$;





Le 2 figure sono ottenute considerando solo la parte di grafico contenuto tra i piani $x = -1.5$ e $x = 1.5$, $y = 0$ e $y = 2$, $z = -1.3$ e $z = 1.3$. La prima mostra il punto di sella: $(0, e^{-1}, -e^{-1})$. La seconda fornisce la proiezione del grafico sul piano xy ed evidenzia le curve di livello.

6. $y' = (y-1)^2 \tan x$ è un'equazione differenziale del I ordine a variabili separabili; la funzione prodotto è definita e continua in ciascuna delle strisce $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \times \mathbb{R}$, al variare di k in $\mathbb{Z}$. Tra gli intervalli in cui può variare x, l'intervallo di ampiezza massima che contiene $\frac{2\pi}{3}$ è $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ e quindi il dominio della soluzione di ogni problema di Cauchy del tipo $y\left(\frac{2\pi}{3}\right) =$ costante sarà contenuto in $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

   (a) È evidente che $y(x) = 1$ è una possibile soluzione dell'equazione differenziale ma non soddisfa il problema di Cauchy $y\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4$. Si possono quindi separare le variabili: da $\displaystyle\int \frac{dy}{(y-1)^2} = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ si ricava $\dfrac{-1}{y-1} = -\ln|\cos x| + c$ (con $c \in \mathbb{R}$), o anche, tenendo conto che nell'intervallo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ la funzione $\cos x$ è negativa, $\dfrac{1}{y-1} = \ln(-\cos x) + C$ (con $C = -c \in \mathbb{R}$)
   Sostituendo, si può ora ricavare la costante che fornisce la soluzione del problema di Cauchy: $\frac{1}{4-1} = \ln\left(-\cos\frac{2\pi}{3}\right) + C$, implica $C = \frac{1}{3} - \ln 2$.
   Quindi si deve avere $y - 1 = \dfrac{1}{\ln(-\cos x) + \frac{1}{3} + \ln 2}$, cioè la soluzione cercata è

$$y(x) = 1 + \frac{3}{3\ln(-\cos x) + 1 + 3\ln 2}\ .$$

   Tale funzione non è definita se $\ln(-\cos x) + \frac{1}{3} + \ln 2 = \ln\left(-2e^{\frac{1}{3}}\cos x\right) = 0$, cioè per $-2e^{\frac{1}{3}}\cos x = 1$, vale a dire per $\cos x = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}}$. Nell'intervallo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ ci sono due soluzioni per tale equazione: $x_1 = \arccos\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}}\right)$ e $x_2 = 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}}\right)$; dato che $\frac{2\pi}{3}$ è compreso tra le due (infatti $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} < -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}}$ e coseno nell'intervallo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

è decrescente), si vede che il dominio massimale su cui è definita la soluzione del problema di Cauchy assegnato è $\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}}\right), 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}}\right)\right)$.

(b) Come già osservato, la funzione $y(x) = 1$ con dominio ristretto a $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ è soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = (y-1)^2 \tan x \\ y\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 \end{cases}$.
Non ne esistono altre poiché la continuità della derivata rispetto a y del fattore in y garantisce l'unicità della soluzione al problema di Cauchy.

7. Al sistema $\begin{cases} (k-1)\,x - y = k+1 \\ x + 2y + z = 0 \\ -x + 2ky + z = -6 \end{cases}$ è associata la matrice completa

$$(A|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} k-1 & -1 & 0 & k+1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2k & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

La matrice dei coefficienti $A = \begin{pmatrix} k-1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2k & 1 \end{pmatrix}$ ha rango ≥ 2 per ogni valore di k poiché la sottomatrice di ordine 2 : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante diverso da zero. La matrice A è quadrata di ordine 3 e quindi ha una sola sottomatrice di ordine 3, il cui determinante

$$\begin{vmatrix} k-1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2k & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k-1 & -1 & 0 \\ 2 & 2-2k & 0 \\ -1 & 2k & 1 \end{vmatrix} = -2\,(k-1)^2 + 2$$

si annulla se e solo se $k-1 = \pm 1$ cioè se e solo se $k = 0$ oppure $k = 2$.
Per tutti i numeri reali diversi da 0 e 2 la matrice A è invertibile e quindi il sistema ammette una ed una sola soluzione (teorema di Cramer).
Per gli altri due valori la matrice $(A|\mathbf{b})$ ha sicuramente rango ≥ 2 in quanto contiene la sottomatrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ che ha determinante diverso da zero. Orlando tale sottomatrice con la prima colonna si ha la matrice A di cui si sa che per tali valori ha determinante nullo. Orlandola con l'ultima colonna

$\boxed{\text{per } k = 2}$ si ha $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$: quindi, per il teorema di Kronecker, $rg\,(A|\mathbf{b}) = 2$ e per il teorema di Rouchè-Capelli il sistema è <u>risolubile</u> (infatti $rg\,(A|\mathbf{b}) = rg\,(A) = 2$) e le sue soluzioni dipendono da $3 - rg\,(A) = 1$ parametro;

$\boxed{\text{per } k = 0}$ si ha $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4 \neq 0$: quindi $rg\,(A|\mathbf{b}) = 3$ e per il teorema di Rouchè-Capelli il sistema <u>non è risolubile</u> (infatti $rg\,(A|\mathbf{b}) > rg\,(A) = 2$).

8. Il numero complesso $(i-1)\left(2 - 2\sqrt{3}i\right) = -2 + 2\sqrt{3} + i\left(2\sqrt{3} + 2\right)$ ha parte reale $-2 + 2\sqrt{3}$ e parte immaginaria $2\sqrt{3} + 2$. Inoltre ha
- come primo fattore il numero complesso $z = -1 + i$ che ha modulo $\sqrt{2}$ e argomento principale $\frac{3}{4}\pi$ (poiché il suo coseno è $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ e il suo seno è $\frac{1}{\sqrt{2}}$)
- come secondo fattore il numero complesso $w = 2 - 2\sqrt{3}i$ che ha modulo 4 e argomento principale $-\frac{1}{3}\pi$ (poiché il suo coseno è $\frac{1}{2}$ e il suo seno è $-\frac{\sqrt{3}}{2}$)

Dunque: $|zw| = |z|\,|w| = 4\sqrt{2}$ mentre un argomento di zw è dato dalla somma dei due argomenti: $\frac{3}{4}\pi + \left(-\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{5}{12}\pi$.
Ne segue che il numero complesso ha la seguente rappresentazione sul piano di Argand-Gauss