Soluzioni del compito di Istituzioni di Matematiche/Matematica per Chimica F45 e F5X (20/7/10)

I testi sono in parte comuni ai due temi d'esame. Gli studenti del vecchio ordinamento hanno una domanda in meno nei primi sette esercizi, ma hanno anche l'ottava domanda che non riguarda il nuovo ordinamento

1. La funzione $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - 2x$

   (a) è definita purché il radicando non sia negativo. Quindi l'insieme di definizione della funzione è $\boxed{E = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)}$.
   $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x} \geq 2x$:
   se $x \leq -2$ la disuguaglianza stretta è certamente vera poiché il radicale esiste ed è ≥ 0;
   se $x \geq 0$, bisogna che sia $x^2 + 2x \geq 4x^2$, cioè $x\,(3x - 2) \leq 0$.
   Quindi gli zeri di $f(x)$ sono $x = 0$ e $x = \frac{2}{3}$ e la funzione è positiva in $(-\infty, -2)$ e in $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ mentre è negativa in $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

   (b) La funzione è continua da sinistra in -2 e $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 4$;
   la funzione è continua da destra in 0 e $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.
   Per $x \to -\infty$ ha asintoto obliquo di equazione $\boxed{y = -3x - 1}$ poiché (ricordare che se $x \to -\infty$ allora $x < 0$ e quindi $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ e quindi $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 2x} + x$ presenta una forma di indecisione $[\infty - \infty]$):
   $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} |x| - 2x = \lim_{x \to -\infty} -3x = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -3 \quad \text{e}$$
   $$\lim_{x \to -\infty} (f(x) + 3x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 2x} + x = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-x - x} = -1$$
   Per $x \to +\infty$ ha asintoto obliquo di equazione $\boxed{y = -x + 1}$ poiché (ricordare che se $x \to +\infty$ allora $x > 0$ e quindi $\sqrt{x^2} = |x| = x$ e quindi $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x$ presenta una forma di indecisione $[\infty - \infty]$):
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} |x| - 2x = \lim_{x \to +\infty} -x = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \quad \text{e}$$
   $$\lim_{x \to +\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x + x} = 1$$

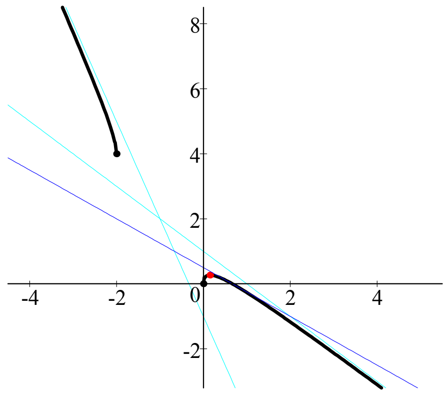
   (c) $f'(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}} - 2$ ha insieme di definizione $E' = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$.
   Se $x \in (-\infty, -2)$, $f'(x) = \dfrac{(x + 1) - 2\sqrt{x^2 + 2x}}{\sqrt{x^2 + 2x}} < 0$ poiché tanto $(x + 1)$ che $-2\sqrt{x^2 + 2x}$ sono negativi.
   Se $x \in (0, +\infty)$ si ha $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x + 1 \geq 2\sqrt{x^2 + 2x}$; essendo entrambi i membri positivi, nell'intervallo in esame la disuguaglianza equivale a $(x + 1)^2 \geq 4\,(x^2 + 2x)$ cioè $3x^2 + 6x - 1 \leq 0$. Delle soluzioni di $3x^2 + 6x - 1 = 0$, l'unica positiva è: $\frac{-3 + 2\sqrt{3}}{3} = -1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$.
   Quindi in $\left(0, -1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$ si ha $f'(x) > 0$ e in $\left(-1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}, +\infty\right)$ si ha $f'(x) < 0$
   Ne segue che la funzione cresce nell'intervallo $\left(0, -1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$, mentre decresce nei due intervalli $(-\infty, -2)$ e $\left(-1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}, +\infty\right)$ e ha in $\boxed{x = -1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}}$ un punto di massimo relativo.
   Tenuto conto che nel punto di massimo relativo vale l'uguaglianza $x^2 = -2x + \frac{1}{3}$, il valore in tale punto è $f\left(-1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = \sqrt{\frac{1}{3} + 2 - \frac{4}{3}\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$.

(d) $f''(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2x} - (x+1)^2/\sqrt{x^2+2x}}{x^2+2x} = \dfrac{x^2+2x-(x+1)^2}{(x^2+2x)^{3/2}} = \dfrac{-1}{(x^2+2x)^{3/2}} < 0$ per ogni $x \in E'$; quindi in ciascuno dei due intervalli $(-\infty, -2)$ e $(0, +\infty)$ la funzione è concava.

(e) In $x = 0$ la derivata non è definita, ma $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$: quindi la retta tangente al grafico in $(0,0)$ è l'asse y; invece $f'\left(\frac{2}{3}\right) = \dfrac{\frac{2}{3}+1}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}\right)}} - 2 = \dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}} - 2 - \frac{3}{4}$.

Quindi la retta tangente al grafico nel punto $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ ha equazione $\boxed{y = -\frac{3}{4}\left(x - \frac{2}{3}\right)}$.

(f) Nel grafico di $\sqrt{x^2+2x} - 2x$ sono evidenziati i due asintoti, la tangente in $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$, il massimo relativo.



2. La legge $\dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$ è definita e continua purché sia $\ln x > -1$ cioè $x > e^{-1}$ e quindi in particolare la funzione definita da tale legge sull'intervallo $(1, +\infty)$ è definita e continua; dunque è dotata di primitiva. Tale primitiva può essere calcolata operando per sostituzione immediata ($1 + \ln x = t$ e $\dfrac{dx}{x} = dt$):

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx = \int \sqrt{t} dt = \tfrac{2}{3} t^{3/2} + c = \boxed{\tfrac{2}{3}(1+\ln x)^{3/2} + c}$$

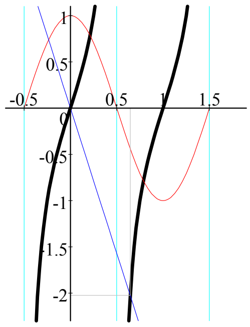
3. La funzione definita sull'intervallo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ dalla legge $g(x) = x \sin(\pi x)$
- si annulla per $x = 0$ e per $x = 1$,
- è positiva nell'intervallo $(0,1)$ ove sono positivi entrambi i fattori e quindi, visto che $g(-x) = g(x)$, anche nell'intervallo $(-1, 0)$,
- è negativa nell'intervallo $\left(1, \frac{3}{2}\right]$,
- $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$ mentre $g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{3}{2}$.

Volendo si può studiare la monotonia, ma non è fondamentale per il successivo calcolo dell'area. Inoltre lo studio della derivata prima

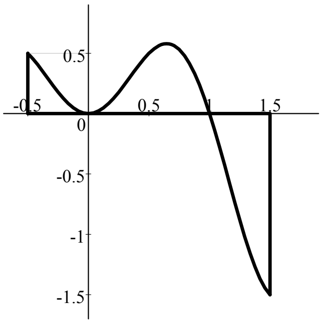
$$g'(x) = \sin(\pi x) + \pi x \cos(\pi x) = \cos(\pi x)(\tan(\pi x) + \pi x)$$

può essere fatto solo in modo approssimato (confronto grafico ed eventuali metodi numerici), come schizzato brevemente nelle prossime righe:

$\cos(\pi x) \geq 0$ in $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
$\tan(\pi x) \geq -\pi x$ in $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ e in $\left[\alpha, \frac{1}{2}\right)$, ove
$\alpha \approx 0.646\pi$ (vedi grafico a lato)
e quindi $g'(x) > 0$ in $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e in $\left(\frac{1}{2}, \alpha\right)$. Dunque $g(x)$ cresce in questi due intervalli, decresce in $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ e in $\left(\alpha, \frac{1}{2}\right)$; ha punto di minimo relativo in $x = 0$ e uno di massimo relativo in $x = \alpha$.



Dalle considerazioni sul grafico di $g(x)$ precedentemente fatte si vede che la regione R da prendere in esame è quella delimitata nella figura sottostante dalla linea più spessa e la sua area



è data da $\mathcal{A}(R) = \int_{-1/2}^{1} g(x)\,dx - \int_{1}^{3/2} g(x)\,dx$. Risulta

$$\int g(x)dx = \int x\sin(\pi x)\,dx = -\frac{x}{\pi}\cos(\pi x) + \frac{1}{\pi}\int \cos(\pi x)\,dx =$$
$$= -\frac{x}{\pi}\cos(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x) + c$$

e quindi

$$\mathcal{A}(R) = \left[-\frac{x}{\pi}\cos(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)\right]_{-\frac{1}{2}}^{1} + \left[\frac{x}{\pi}\cos(\pi x) - \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)\right]_{1}^{\frac{3}{2}} =$$
$$= \left(\frac{1}{\pi} + 0 + 0 + \frac{1}{\pi^2}\right) + \left(0 + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi} + 0\right) = \boxed{\frac{2}{\pi^2} + \frac{2}{\pi}} \approx 0.839.$$

4. Notiamo che la funzione $f(t) = t^{-\frac{1}{2}}e^{1-t}$ è definita e continua nell'intervallo $(0, +\infty)$. Poiché $\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$, la funzione non è limitata; inoltre l'intervallo su cui è esteso l'integrale improprio è illimitato: quindi tale integrale è improprio di prima e di seconda specie.
Quindi conviene spezzare l'intervallo di integrazione e leggere $\int_{0+}^{+\infty} f(t)\,dt$ come somma di due integrali impropri (rispettivamente di seconda e prima specie): $\int_{0+}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{0+}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$.
$\star$ per $t \to 0+$ risulta $f(t) \simeq et^{-\frac{1}{2}}$ (poiché $e^{-t} \to 1$) e visto che $\int_{0+}^{1} et^{-\frac{1}{2}}dt = 2e$ anche $\int_{0+}^{1} f(t)\,dt$ converge, per il criterio del confronto asintotico;
$\star$ per $t \geq 1$ risulta $f(t) \leq e^{1-t}$ (poiché $t^{-\frac{1}{2}} \leq 1$) e visto che $\int_{1}^{+\infty} e^{1-t}dt = e$ anche $\int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, per il criterio del confronto.
Dunque $\int_{0+}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, in quanto somma di due integrali impropri convergenti.

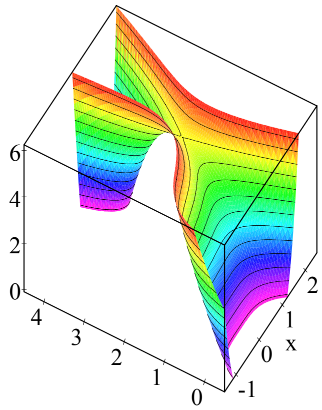
5. La funzione di due variabili $f(x,y) = x^4 - xy^2 + 4y$, definita in $\mathbb{R}^2$, ha derivate parziali $f_x(x,y) = 4x^3 - y^2$ e $f_y(x,y) = -2xy + 4$.

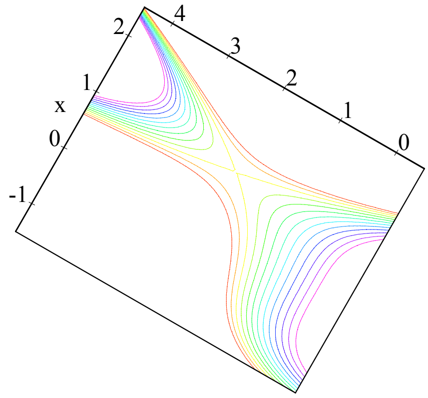
   (a) I suoi punti critici sono quelli le cui coordinate annullano il gradiente **grad** $(f(x,y)) = (f_x(x,y), f_y(x,y))$, cioè le soluzioni del sistema: $\begin{cases} 4x^3 - y^2 = 0 \\ xy = 2 \end{cases}$
   che equivale a $\begin{cases} y = 2/x \\ 4x^3 - 4/x^2 = 0 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} y = 2/x \\ x^5 = 1 \end{cases}$

Quindi in $\mathbb{R}^2$ c'è un solo punto critico: $\boxed{(1,2)}$. Esso è un punto di sella: infatti l'hessiano

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 12x^2 & -2y \\ -2y & -2x \end{vmatrix} = -4\left(6x^3 + y^2\right)$$

è negativo nel punto. Il valore della funzione nel punto critico è: $f(1,2) = 5$.





Le 2 figure sono ottenute considerando solo la parte di grafico contenuto tra i piani $x = -1.5$ e $x = 2.5$, $y = -0.5$ e $y = 4.5$, $z = -0.1$ e $z = 6.25$. La prima mostra la sella $(1,2,5)$. La seconda fornisce la proiezione del grafico sul piano xy ed evidenzia le curve di livello.

(b) Il valore della funzione in $(-1,1)$ è $f(-1,1) = 1+1+4 = 6$; quello delle derivate parziali è $f_x(-1,1) = -4-1 = -5$ e $f_y(-1,1) = 2+4 = 6$. Quindi l'equazione del piano tangente al grafico della funzione nel punto $(-1,1,6)$ è: $z - 6 = -5\,(x+1) + 6\,(y-1)$, cioè $\boxed{5x - 6y + z + 5 = 0}$.

6. $y'' + 2y' - 8y = e^{2t}$ è un'equazione differenziale del II ordine lineare completa a coefficienti costanti. Il suo integrale generale è la somma di una soluzione particolare e dell'integrale generale della sua omogenea associata.
Risolviamo l'equazione differenziale omogenea associata: $z'' + 2z' - 8z = 0$.
La sua equazione caratteristica $r^2 + 2r - 8 = 0$ ha soluzioni $r = 2$ e $r = -4$: quindi sono soluzioni dell'equazione omogenea tutte e sole quelle della forma

$$z(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-4t} \text{ (con } c_1,\, c_2 \text{ variabili in } \mathbb{R}).$$

Una soluzione particolare dell'equazione completa ha la forma $\overline{y}(t) = c(t)\, e^{2t}$ ove $c(t)$ è una funzione due volte derivabile in $\mathbb{R}$ che deve essere tale che sostituendo

$\overline{y}'(t) = [c'(t) + 2c(t)]\, e^{2t}$ e

$\overline{y}''(t) = [(c''(t) + 2c'(t)) + 2\,(c'(t) + 2c(t))]\, e^{2t} = [c''(t) + 4c'(t) + 4c(t)]\, e^{2t}$

nell'equazione differenziale si ottenga una identità in t. Ora

$[c''(t) + 4c'(t) + 4c(t)]\, e^{2t} + 2\,[c'(t) + 2c(t)]\, e^{2t} - 8c(t)\, e^{2t} = [c''(t) + 6c'(t)]\, e^{2t}$

coincide con e^{2t} se e solo se $c''(t) + 6c'(t) = 1$.
Ciò si verifica sicuramente se $6c'(t) = 1$ (e di conseguenza $c''(t) = 0$) cioè ad esempio per $c(t) = \frac{1}{6}t$. Dunque una soluzione particolare dell'equazione differenziale completa è $\overline{y}(t) = \frac{1}{6}te^{2t}$
Di conseguenza l'integrale generale di tale equazione è

$$\boxed{y(t) = \tfrac{1}{6}te^{2t} + c_1 e^{2t} + c_2 e^{-4t}} \text{ (con } c_1,\, c_2 \text{ variabili in } \mathbb{R}).$$

Tra queste soluzioni cerchiamo quella tale che $\begin{cases} y(\ln 2) = 0 \\ y'(\ln 2) = 0 \end{cases}$

Si ha $y'(t) = \frac{1}{6}\,(1+2t)\, e^{2t} + 2c_1 e^{2t} - 4c_2 e^{-4t}$ e quindi il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} \frac{\ln 2}{6} e^{2\ln 2} + c_1 e^{2\ln 2} + c_2 e^{-4\ln 2} = 0 \\ \frac{1}{6}\,(1 + 2\ln 2)\, e^{2\ln 2} + 2c_1 e^{2\ln 2} - 4c_2 e^{-4\ln 2} = 0 \end{cases}$$

cioè, tenuto conto che $e^{\ln 2}=2$:

$$\begin{cases} \frac{2\ln 2}{3}+4c_1+\frac{1}{16}c_2=0 \\ \frac{2}{3}(1+2\ln 2)+8c_1-\frac{1}{4}c_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\ln 2}{3}+4c_1+\frac{1}{16}c_2=0 \\ \frac{2}{3}-\frac{3}{8}c_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\ln 2}{3}+4c_1+\frac{1}{9}=0 \\ c_2=\frac{16}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=-\frac{1+6\ln 2}{36} \\ c_2=\frac{16}{9} \end{cases}$$

Dunque la soluzione del problema di Cauchy proposto è $\boxed{y(t)=\frac{1}{6}te^{2t}-\frac{1+6\ln 2}{36}e^{2t}+\frac{16}{9}e^{-4t}}$.

7. I quattro vettori $\mathbf{a}=(1,1,0,0)$, $\mathbf{b}=(0,-1,1,1)$, $\mathbf{c}=(0,1,-1,1)$, $\mathbf{d}=(1,-1,0,1)$ di $\mathbb{R}^4$ danno luogo ad un matrice A il cui determinante può essere facilmente ottenuto sommando la terza colonna alla seconda, la prima riga alla quarta e la seconda alla terza e alla quarta e sviluppando con la regola di Laplace secondo la terza riga (in grassetto la sottomatrice di cui si deve calcolare il determinante) e poi secondo l'ultima

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{vmatrix}=(-1)^7\cdot 2\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-4.$$

Essendo il determinante non nullo, i quattro vettori sono indipendenti.

8. Il numero complesso $z=\dfrac{2i-2}{1+\sqrt{3}i}$ ha:

modulo $|z|=\dfrac{|2i-2|}{|1+\sqrt{3}i|}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

argomento (o meglio uno degli argomenti) uguale alla differenza degli argomenti (principali) di $2i-2$ e di $1+\sqrt{3}i$ che sono rispettivamente $\frac{3}{4}\pi$ e $\frac{1}{3}\pi$: quindi $\arg z=\frac{5}{12}\pi$.

È noto che

$|z^4|=|z|^4$, e quindi $|z^4|=4$,

mentre $\arg(z^4)=4\arg(z)$ e quindi un argomento di z^4 è $\frac{5}{3}\pi$. Questo argomento però non è principale, poiché non appartiene all'intervallo $(-\pi,\pi]$; il corrispondente argomento principale è $-\frac{1}{3}\pi$.

In particolare $z^4=4\left(\cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right)\right)=2-2\sqrt{3}i$.