ISTITUZIONI DI Matematica per CHIMICA F5X (e F45)

Prova del 15/2/2012

1) La funzione $f(x)=\sqrt{2}\,x-\sqrt{x^2-2x}$

a) è definita purché il radicando sia non negativo: $x^2-2x\geq 0$ e quindi per $\boxed{x\in(-\infty,0]\cup[2,+\infty)}$. Ha sicuramente uno zero in $x=0$ (poiché $f(0)=0$); inoltre $f(x)\geq 0 \iff \sqrt{x^2-2x}\leq\sqrt{2}\,x \iff \begin{cases} x\in(-\infty,0]\cup[2,+\infty) \\ x\geq 0 \\ x^2-2x\leq(\sqrt{2}x)^2 \end{cases}$

cioè $\iff \begin{cases} x\in\{0\}\cup[2,+\infty) \\ x^2+2x\geq 0 \end{cases} \iff x\in\{0\}\cup[2,+\infty)$ e si vede $f(x)=0$ SOLO in $x=0$.

Dunque: $\boxed{f(x)<0 \text{ in } (-\infty,0),\ f(x)>0 \text{ in } [2,+\infty),\ f(x)=0 \text{ in } x=0}$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2}\,x-|x| \underset{\boxed{x<0}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2}\,x+x=-\infty$; si vede inoltre

che $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\sqrt{2}+1$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(\sqrt{2}+1)x=\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{x^2-2x}-x=[-\infty+\infty]=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x-x^2}{-\sqrt{x^2-2x}+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x}{-|x|+x} \underset{\boxed{x<0}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x+x}=-1$

Quindi per $x\to-\infty$ la funzione ha asintoto obliquo $y=(\sqrt{2}+1)x-1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2}\,x-|x| \underset{\boxed{x>0}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2}\,x-x=+\infty$; si vede inoltre che

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\sqrt{2}-1$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(\sqrt{2}-1)x=\lim\limits_{x\to+\infty}x-\sqrt{x^2-2x}=[\infty-\infty]=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2+2x}{x+\sqrt{x^2-2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x+|x|}=1$

Quindi per $x\to+\infty$ la funzione ha asintoto obliquo $y=(\sqrt{2}-1)x+1$

Invece in $x=0$ la funzione è continua da sinistra (e quindi $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$) e in $x=2$ è continua da destra (e quindi $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2\sqrt{2}$).

c) $f'(x)=\sqrt{2}-\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}=\frac{\sqrt{2x^2-4x}-(x-1)}{\sqrt{x^2-2x}}\geq 0$ nel suo insieme di definizione

(che è $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$) $\iff \sqrt{2x^2-4x}\geq(x-1)$: ciò è certamente vero per ogni $x\in(-\infty,0)$ poiché il secondo membro della disuguaglianza è <0 mentre il primo è >0; se invece $x\in(2,+\infty)$ la disuguaglianza equivale a: $2x^2-4x\geq(x-1)^2$, cioè $x^2-2x-1\geq 0$. Poiché l'equazione ha radici $x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$ e solo $1+\sqrt{2}>2$, ciò significa che $f'(x)>0$ in $(1+\sqrt{2},+\infty)$, mentre $f'(x)<0$ in $(2,1+\sqrt{2})$.

Ne consegue che $f(x)$ è crescente in $(-\infty,0]$ e in $(1+\sqrt{2},+\infty)$, è decrescente in $[2,1+\sqrt{2})$ e ha un punto di minimo relativo in $x=1+\sqrt{2}$.

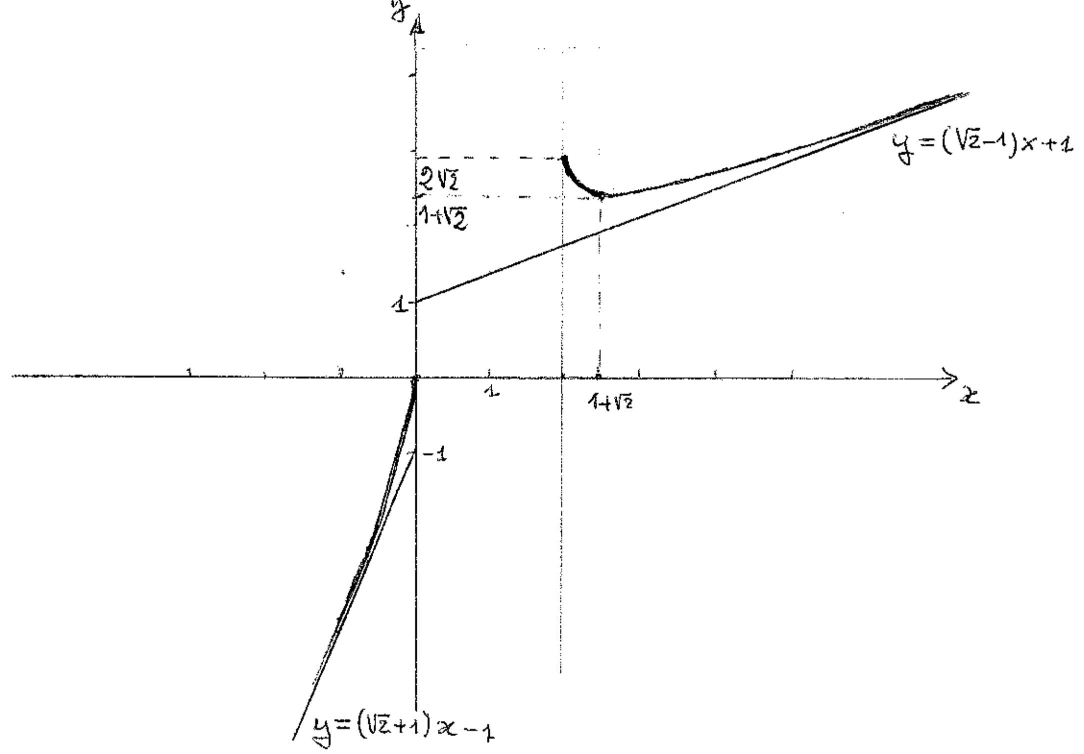
In tale punto la funzione vale $f(1+\sqrt{2})=\sqrt{2}+2-\sqrt{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}=1+\sqrt{2}$.

d) $f''(x) = -\dfrac{\sqrt{x^2-2x} - \dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x}}}{x^2-2x} = \dfrac{-\left(x^2-2x-(x-1)^2\right)}{(x^2-2x)^{3/2}} = \dfrac{1}{(x^2-2x)^{3/2}} > 0 \quad \forall x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Quindi su ciascuno dei due intervalli su cui è definita la funzione è convessa.

e) Nel punto di ascissa $x=2$ la derivata prima non è definita, ma $\lim\limits_{x \to 2+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2+} \sqrt{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2(x-2)}} = -\infty$. Ciò significa che in $x=2$ la funzione ha tangente di equazione $x = 2$

f)

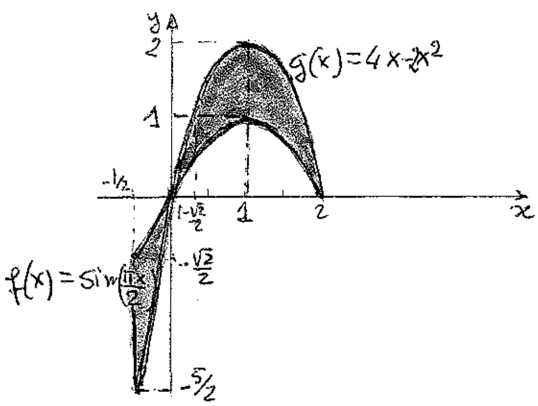


2. $(\sin 2x)\sqrt{5+3\cos 2x}$: si noti che sin e cos sono definite e continue su tutto $\mathbb{R}$; inoltre $5+3\cos 2x \geq 2 \ \forall x \in \mathbb{R}$ e quindi anche il radicale è definito e continuo su tutto $\mathbb{R}$. Dunque l'intervallo massimale di definizione di ogni primitiva è $\mathbb{R}$.

Per calcolare l'integrale, osservare che $(5+3\cos 2x)' = -6 \sin 2x$. Quindi l'integrale può essere calcolato per sostituzione, ponendo $5+3\cos 2x = t$ e $dt = -6(\sin 2x)dx$:

$$\int (\sin 2x)\sqrt{5+3\cos 2x}\, dx = \int \sqrt{t} \cdot \left(-\tfrac{1}{6}\right) dt = -\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{t^3} + c = -\frac{1}{9}\sqrt{(5+3\cos 2x)^3} + c.$$

3. Le due funzioni in questione hanno per grafico: una sinusoide "contratta" di un fattore $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1}$ lungo l'asse x e che quindi passa per $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $(1,1)$, $(2,0)$ ed è crescente nell'intervallo $[-1/2, 1]$ e decrescente nell'altro e un arco di parabola concava con asse $x=1$ (e vertice $(1,2)$) che interseca l'asse x in $(0,0)$ e $(2,0)$ e passa per $(-1/2, -5/2)$.



I grafici di $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ e di $4x-2x^2$ presentano entrambi simmetria rispetto all'asse $x=1$ (anche se l'intervallo in cui sono considerate f e g non è simmetrico rispetto a tale asse): possiamo quindi limitare il confronto tra le due funzioni all'intervallo $[-1/2, 1]$.

Palesemente $f(-1/2)=-\frac{\sqrt{2}}{2} > g(-1/2)=-5/2$, $f(0)=g(0)=0$ e $f(1)=1<g(1)=2$.
Inoltre in tutto l'intervallo $[-\frac{1}{2},0)$ si ha $f(x)>g(x)$ e nell'intervallo $(0,1)$ (come nel suo simmetrico $(1,2)$) si ha $f(x)<g(x)$. Infatti il coefficiente angolare $\frac{\pi}{2}$ della tangente al grafico di $f(x)=\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}$ nell'origine è minore di quello della tangente al grafico di $g(x)=4x-2x^2$, che nell'origine vale 4 e visto che nell'intervallo $[-1/2,0)$ la funzione $f(x)$ è convessa ($\Rightarrow$ il grafico sta sopra la tangente) e la $g(x)$ è concava ($\Rightarrow$ il grafico sta sotto la tangente) sicuramente in $[-1/2,0)$ si ha $f(x)>\frac{\pi}{2}x>4x>g(x)$.
In $(0,1]$, ove entrambe le funzioni sono concave (e quindi il ragionamento precedente non è valido) si può osservare che là dove $g(x)\geq 1$ evidentemente $g(x)>f(x)$ e nell'intervallo $(0,1-\frac{\sqrt{2}}{2})$ dove ciò non avviene $g'(x)=4-4x>g'(1-\frac{\sqrt{2}}{2})=2\sqrt{2}>\frac{\pi}{2}>\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}=f'(x)$ quindi l'incremento che viene dato in ogni punto alla funzione $g(x)$ è maggiore di quello dato alla $f(x)$ e di conseguenza $g(x)>f(x)$
Ne consegue che l'area della regione racchiusa tra i due grafici e le rette $x=-1/2$, $x=2$ va calcolato come

$$\mathcal{A} = \int_{-1/2}^{0}(f(x)-g(x))\,dx + \int_{0}^{2}(g(x)-f(x))\,dx.$$

Si vede che $\int(f(x)-g(x))\,dx = \int(\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2})-4x+2x^2)\,dx = -\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}-2x^2+\frac{2}{3}x^3$ e quindi

$$\mathcal{A} = \left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}-2x^2+\frac{2}{3}x^3\right]_{-1/2}^{0} + \left[2x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\right]_{0}^{2} = -\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+8-\frac{16}{3}-\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi} =$$
$$= 3+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{\sqrt{2}-6}{\pi} = \boxed{\frac{13}{4}+\frac{\sqrt{2}-6}{\pi}}$$

4. La funzione $f(t)=\frac{\ln(1+2t)}{t^{3/2}}$ è definita per $t>0$ (devono essere positivi la base della potenza $t^{3/2}$ e l'argomento del logaritmo!) e in tale intervallo è continua (in quanto rapporto di funzioni continue con denominatore mai nullo) e positiva poiché l'argomento del logaritmo è >1.
Per $t\to 0^+$, $f(t)\sim\frac{2t}{t^{3/2}}=\frac{2}{t^{1/2}}\to+\infty$: quindi la funzione è illimitata in $(0,+\infty)$. Ne segue che $\int_{0^+}^{+\infty}f(t)\,dt$ è somma di un integrale di II specie e di uno di prima. Possiamo ades. spezzare $\int_{0^+}^{+\infty}f(t)\,dt=\int_{0^+}^{1}f(t)\,dt+\int_{1}^{+\infty}f(t)\,dt$.
Per il criterio del confronto asintotico, poiché $\int_{0^+}^{1}\frac{2}{t^{1/2}}\,dt=4$ converge, anche $\int_{0^+}^{1}f(t)\,dt$ converge, essendo $f(t)\sim\frac{2}{t^{1/2}}$ per $t\to 0^+$.
Per $t\to+\infty$ non si può usare il criterio del confronto asintotico ma si può osservare che $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+2t)/t^{3/2}}{1/t^{5/4}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+2t)}{t^{1/4}}=0$ (l'esponente $5/4$ è stato scelto in modo che fosse >1 e $<3/2$, il che consente di avere al denominatore dell'ultima frazione una potenza con esponente positivo e di applicare il confronto di infiniti tra logaritmi e potenze). Quindi "definitivamente" si avrà $\frac{\ln(1+2t)}{t^{3/2}}<\frac{1}{t^{5/4}}$ e poiché $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{t^{5/4}}=4$ converge anche $\int_{1}^{+\infty}f(t)\,dt$ converge per il criterio del confronto per disequazioni. Dunque $\int_{0^+}^{+\infty}f(t)$ converge poiché somma di integrali convergenti.

5. La funzione $f(x,y)=2x^2y+3y^2-x\sqrt{y}$ è definita in $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$ ed è ivi continua. Le sue derivate parziali

$f_x(x,y)=4xy-\sqrt{y}$ e $f_y(x,y)=2x^2+6y-\frac{x}{2\sqrt{y}}$

sono definite e continue rispettivamente in $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$ e in $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$.
Quindi il metodo del gradiente per determinare i punti critici può essere usato solo in $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$. Il gradiente si annulla se e solo se

$\begin{cases} \sqrt{y}\,(4x\sqrt{y}-1)=0 \\ 2x^2+6y-\frac{x}{2\sqrt{y}}=0 \end{cases}$ cioè, visto che $y\neq 0$, $\begin{cases} \sqrt{y}=\frac{1}{4x} \\ 2x^2+\frac{6}{16x^2}-\frac{x}{\frac{2}{4x}}=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{8x^2}=0$ IMPOSSIBILE

Dunque la funzione non ha punti critici.
Il punto $(-1,1)$ appartiene a $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$, quindi è possibile calcolare il piano tangente in $(-1,1,f(-1,1))$. Osservo che:

$f(-1,1)=2+3+1=6$, $f_x(-1,1)=-4-1=-5$, $f_x(-1,1)=2+6+\frac{1}{2}=\frac{17}{2}$

Quindi l'equazione del piano tangente al grafico in $(-1,1,f(-1,1))$ è

$$z-6=-5\,(x+1)+\frac{17}{2}\,(y-1)$$

o anche $$10x-17y+2z=-15.$$

6. $y''-5y'+6y=2te^{3t}$ è un'equazione differenziale del II ordine, lineare completa a coefficienti costanti e termine noto continuo in $\mathbb{R}$. Ciò garantisce che ogni problema di Cauchy ammette 1 e 1 sola funzione soluzione.

equazione omogenea associata: $z''-5z'+6z=0$
La sua equazione caratteristica $r^2-5r+6=0$ ha soluzioni $r_1=2, r_2=3$ e quindi l'equazione omogenea ha soluzioni del tipo $z(t)=c_1e^{2t}+c_2e^{3t}$.
Ricerchiamo una soluzione particolare tra quelle della forma $\bar{y}(t)=f(t)e^{3t}$.
$\bar{y}'(t)=f'(t)e^{3t}+3f(t)e^{3t}$; $\bar{y}''(t)=f''(t)e^{3t}+6f'(t)e^{3t}+9f(t)e^{3t}$.
Sostituiamo questa soluzione e le sue derivate nell'equazione:

$e^{3t}\left(f''(t)+6f'(t)+9f(t)-(5f'(t)+15f(t))+6f(t)\right)=2te^{3t} \Rightarrow f''(t)+f'(t)=2t$

Questa è di nuovo una equazione differenziale del II ordine lineare completa a coefficienti costanti; mi interessa 1 sola soluzione che posso cercare nei polinomi di II grado: $f(t)=at^2+bt+c \Rightarrow f'(t)=2at+b \Rightarrow f''(t)=2a$
e sostituendo $2a+2at+b=2t$. Poiché questa deve essere un'identità in t si vede che deve essere $\begin{cases} 2a=2 \\ b=-2a \end{cases}$ cioè $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$, mentre si può assumere $c=0$, visto che è ininfluente.

Allora una sol. particolare dell'equazione data è $\bar{y}(t)=(t^2-2t)e^{3t}$ e l'integrale generale è $y(t)=(t^2-2t+c_2)e^{3t}+c_1e^{2t}$.
Perché questa sia una soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y(0)=3 \\ y'(0)=0 \end{cases}$
visto che $y'(t)=(3t^2-6t+3c_2+2t-2)e^{3t}+2c_1e^{2t}$, deve risultare

$\begin{cases} c_2+c_1=3 \\ 3c_2-2+2c_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1+c_2=3 \\ c_2=2-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=7 \\ c_2=-4 \end{cases} \Rightarrow y(t)=(t^2-2t-4)e^{3t}+7e^{2t}.$

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & k \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & k \\ -2 & k & -k \end{pmatrix}$

La matrice AB ha certamente rango 2 se $k \neq 0$ poiché $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & k \end{vmatrix} = 2k \neq 0$
Se invece $k=0$ si ha $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi AB ha rango 1 (1 sola colonna è indipendente).
Dunque se $k \neq 0$ il sistema è certamente risolubile visto che la matrice orlata con la colonna dei termini noti

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & k & 1 \\ -2 & k & -k & k \end{array}\right)$$

non può avere rango >2, avendo due sole righe. Le soluzioni (dipendenti da 1 parametro) si possono trovare pensando z come parametro t:

$$\begin{cases} 2x = 1 - kz \\ -2x + ky = k + kz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{k}{2} t \\ y = \frac{1}{k}(1+k) \\ z = t \end{cases}$$

Se $k=0$ la matrice orlata con la colonna dei termini noti diventa: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ che ha rango 2 in quanto $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.
Quindi per il teorema di Rouché-Capelli il sistema non è risolubile.

8. Il numero complesso $z = (5+2i)(-7-3i) = -35+6+(-14-15)i = -29-29i$ ha modulo $29\sqrt{2}$ e argomento $-\frac{3\pi}{4}$

Quindi le sue radici terze hanno modulo $\sqrt[3]{29\sqrt{2}}$ e argomento
$\theta_k = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$ $(k = -1, 0, 1)$

$$z_0 = \sqrt[3]{29\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt[3]{\frac{29}{2}} - i \sqrt[3]{\frac{29}{2}}$$

$$z_1 = z_0 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \left(\sqrt[3]{\frac{29}{2}} - i \sqrt[3]{\frac{29}{2}} \right) \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) =$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2} \sqrt[3]{\frac{29}{2}} + \frac{1+\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\frac{29}{2}}\, i$$

$$z_{-1} = z_0 \left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right) = \left(\sqrt[3]{\frac{29}{2}} - i \sqrt[3]{\frac{29}{2}} \right) \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) =$$
$$= -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \sqrt[3]{\frac{29}{2}} + \frac{1-\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\frac{29}{2}}\, i$$