Istituzioni di Matematica / Matematiche per CHIMICA F45 e F5X (17/7/12)

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4x}}{x} + 3$

a) è definita purché sia $\begin{cases} x^2-4x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ cioè in $(-\infty, 0) \cup [4, +\infty)$;

inoltre $f(x) \geq 0 \iff \dfrac{\sqrt{x^2-4x}+3x}{x} \geq 0$. Ciò è sicuramente vero in $[4,+\infty)$ poiché tanto numeratore che denominatore sono positivi. Se invece $x \in (-\infty, 0)$ la disuguaglianza vale se e solo se $\sqrt{x^2-4x} + 3x \leq 0$ cioè $\begin{cases} x \in (-\infty, 0) \\ \sqrt{x^2-4x} \leq -3x \end{cases}$
ed, essendo entrambi i membri della disuguaglianza ≥ 0: $\begin{cases} x \in (-\infty, 0) \\ x^2-4x \leq 9x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty, 0) \\ x(8x+4) \geq 0 \end{cases}$

Cioè $f(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -1/2)$ e per $x \in [4, +\infty)$
$f(x) < 0$ per $x \in (-1/2, 0)$
$f(x) = 0$ per $x = -1/2$

b) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} + 3 = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{|x|}{x} + 3 = \begin{cases} \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x} + 3 = 2 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} + 3 = 4 \end{cases}$

quindi ci sono due asintoti orizzontali:
$y = 2$ per $x \to -\infty$ e $y = 4$ per $x \to +\infty$.
Invece $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{-x(4-x)}}{x} + 3 = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{2}{-\sqrt{-x}} + 3 = -\infty \Rightarrow$ asintoto verticale $x=0$

mentre $\lim_{x\to 4^+} f(x) = f(4) = 3$ (funzione continua da destra)

c) $f'(x) = \dfrac{\frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x}} \cdot x - \sqrt{x^2-4x}}{x^2} + 0 = \dfrac{(x-2)x - (x^2-4x)}{x^2\sqrt{x^2-4x}} = \dfrac{2x}{x^2\sqrt{x^2-4x}} > 0$ per $x \in (4, +\infty)$

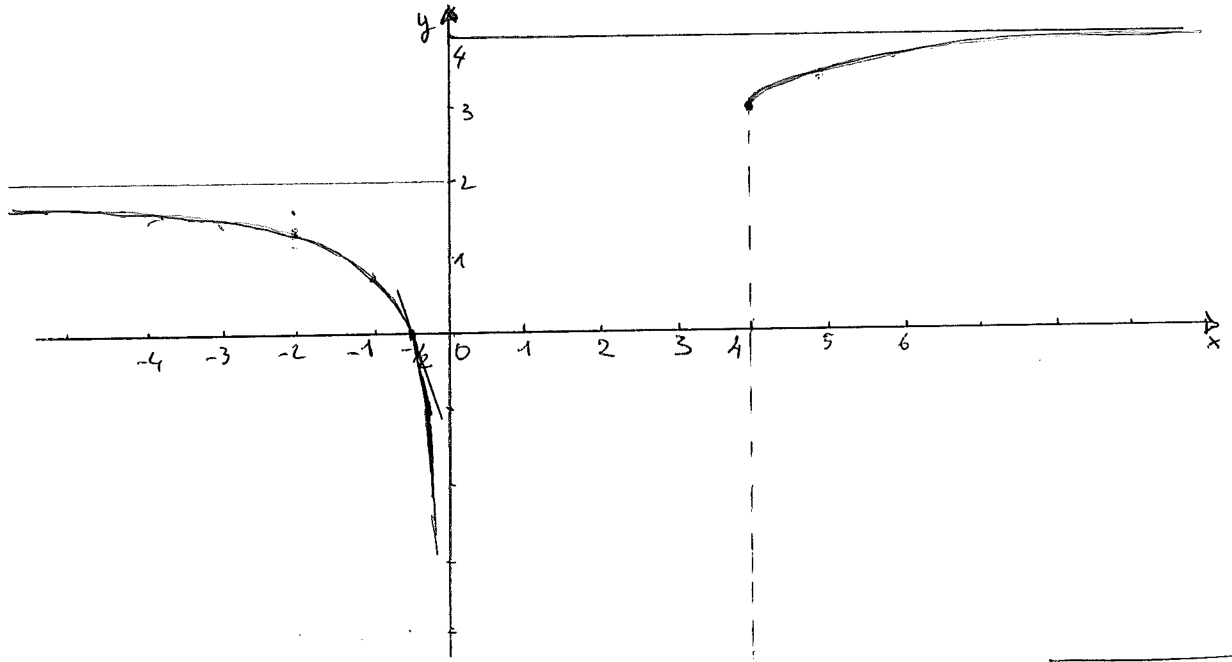
mentre $f'(x) < 0$ per $x \in (-\infty, 0)$. In $x = 4$ la derivata non è definita e $\lim_{x\to 4^+} f'(x) = +\infty$.
Ne segue che $f(x)$ decresce in $(-\infty, 0)$, cresce in $[4, +\infty)$ e non ha estremanti né relativi né assoluti poiché:
- essendo decrescente in $(-\infty, 0)$ e avendo $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ non può avere minimo assoluto né in questo intervallo, né nell'intero I.D.
- avendo $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 4$ ed essendo $f(x)$ decrescente in $(-\infty, 0)$ e crescente in $[4, +\infty)$ si vede che è superiormente limitata con $\sup = 4$, ma non raggiunge mai tale valore quindi non ha max assoluto
- non può avere minimi o massimi relativi poiché i due intervalli su cui $f(x)$ cresce e decresce sono separati $\Rightarrow$ non c'è un intorno di un punto x_0 dell'I.D. t.c. $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$) $\forall x$ dell'intorno.

d) $f'(x) = \dfrac{2}{x\sqrt{x^2-4x}} \Rightarrow f''(x) = -2\,\dfrac{\sqrt{x^2-4x} + x\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}}{x^2(x^2-4x)} = -2\,\dfrac{2x^2-6x}{x^2(x^2-4x)^{3/2}} = 4\,\dfrac{3x-x^2}{x^2(x^2-4x)^{3/2}}$

è negativa tanto in $(-\infty, 0)$ che in $(4, +\infty)$ $\Rightarrow$ la funzione f è concava su entrambi gli intervalli

e) visto che $\lim_{x\to 4^+} f'(x) = +\infty$ l'eq. della retta tangente in $(4,3)$ è $x = 4$.
Visto che $f'(-1/2) = \dfrac{-1}{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{4}+2}} = -\dfrac{8}{3}$ e $f(-\frac{1}{2}) = 0$ l'equazione della retta tangente in $(-\frac{1}{2}, 0)$ è
$y = -\frac{8}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

f)

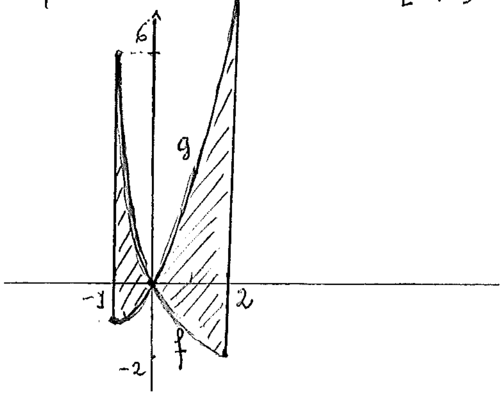


2. $\int \arctan(2x+1)\,dx = \boxed{\text{per parti con fattor finito } \arctan(2x+1)}\ x\arctan(2x+1) - \int \frac{x\cdot 2}{1+(2x+1)^2}\,dx = \boxed{(1+(2x+1)^2)' = 4(2x+1) \text{ e per sostituzione immediata e scomposiz.:}}$

$= x\arctan(2x+1) - \frac{1}{4}\int \frac{4(2x+1)-4}{1+(2x+1)^2}\,dx = x\arctan(2x+1) - \frac{1}{4}\int \frac{4(2x+1)}{1+(2x+1)^2}\,dx + \int \frac{dx}{1+(2x+1)^2} =$

$= x\arctan(2x+1) - \frac{1}{4}\ln\left(1+(2x+1)^2\right) + \frac{1}{2}\arctan(2x+1) + c.$

3. La funzione $f(x) = 2^{1-2x} - 2$ ha per grafico la traslata (di 2 nella direz. dell'asse y verso il basso), della dilatata di un fattore 2 dell'esponenziale decrescente 2^{-2x} che ha asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ di equaz. $x = -2$. Nell'intervallo $[-1,2]$ ha massimo $f(-1) = 6$ e minimo $f(2) = -15/8$ e si annulla per $2^{1-2x} = 2$, cioè in $x = 0$, mentre è > 0 in $[-1,0)$ e < 0 in $(0,2]$.



Invece la funzione $g(x) = x^2 + 2x$ ha per grafico una parabola con asse parallelo all'asse y passante per $(-2,0)$ e $(0,0)$, con vertice in $(-1,1)$ e convessa. Quindi nell'intervallo $[-1,2]$ $g(x)$ è crescente, $g(-1) = -1$, $g(2) = 8$ e si annulla in $x = 0$ mentre $g(x) < 0$ in $[-1,0)$ e $g(x) > 0$ in $(0,2]$.

Ne segue che $g(x) < f(x)$ in $[-1,0)$ e $g(x) > f(x)$ in $(0,2]$ per cui l'area della regione R compresa tra G_f, G_g e le due rette $x=-1$, $x=2$ (tratteggiata in figura) si calcola come

$$\int_{-1}^{0} (f(x) - g(x))\,dx + \int_{0}^{2} (g(x) - f(x))\,dx.$$

Poiché $\int (f(x) - g(x))\,dx = \int (2^{1-2x} - 2 - x^2 - 2x)\,dx = -\frac{1}{2\ln 2}\cdot 2^{1-2x} - 2x - x^2 - \frac{x^3}{3} + c$ (poiché $(2^{1-2x})' = (2e^{-(\ln 2)\cdot 2x})' = -2\cdot 2\ln 2\, e^{-(\ln 2)2x} = -2\ln 2 \cdot 2^{1-2x}$), si trova che

$$\text{Area } R = \left[-\frac{1}{2\ln 2}2^{1-2x} - 2x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{2\ln 2}2^{1-2x} - 2x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{2}^{0} = \frac{-2}{\ln 2} - \left(-\frac{4}{\ln 2} + 2 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{16\ln 2} - 8 - \frac{8}{3}\right) =$$

$$= \frac{33}{16\ln 2} + \frac{28}{3}$$

4. La funzione $f(t)=\frac{|\sin t|}{t^{7/4}}$ è definita continua e non negativa in $(0,+\infty)$.
Quindi su tale intervallo è definita la funzione integrale $F(x)=\int_1^x f(t)dt$ e $\int_{0+}^{+\infty} f(t)dt = \int_{0+}^{1} f(t)dt + \int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ sarà sicuramente convergente se lo è ciascuno degli addendi cioè se è finito ciascuno dei limiti $\lim_{x\to 0+} -\int_1^x f(t)dt$ e $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,dt$.

Osservo che per $t\to 0+$ $\quad \frac{|\sin t|}{t^{7/4}} \sim \frac{|t|}{t^{7/4}} \overset{\boxed{\text{poiché } t>0}}{=} \frac{1}{t^{3/4}}$. Poiché in $(0,1)$ la $f(t)$ è strettamente positiva, si può applicare il criterio del confronto asintotico: visto che $\int_{0+}^{1} \frac{dt}{t^{3/4}} = 4$ è finito, anche $\int_{0+}^{1} f(t)dt$ lo è.

Per $t\to+\infty$ la funzione $|\sin t|$ non ha limite: quindi non posso usare il criterio del confronto asintotico ($f(t)/t^{-7/4} = |\sin t|$, infatti), ma visto che $f(t)\geq 0$ posso usare il criterio del confronto: $0\leq f(t) \leq \frac{1}{t^{7/4}}$ e poiché $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{7/4}} = \frac{4}{3}$ è finito, anche $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ lo è.
Ne consegue la convergenza di $\int_{0+}^{+\infty} f(t)dt$.

5. $f(x,y)=x^2(\ln y-1)-(y-1)^2$ è definita in $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$ ed è continua e dotata di derivate parziali continue (in quanto prodotto di funzioni elementari in x o y che lo sono). Essa avrà quindi punti critici in corrispondenza alle coppie (x,y) che annullano
$\operatorname{grad} f = (f_x, f_y) = \left(2x(\ln y-1),\ \frac{x^2}{y}-2(y-1)\right)$.

$$\begin{cases} 2x(\ln y-1)=0 \\ \frac{x^2}{y}=2(y-1)\end{cases} \iff \text{è verificato almeno uno dei due sistemi } \begin{cases} x=0 \\ \frac{x^2}{y}=2(y-1)\end{cases} \text{ o } \begin{cases} \ln y=1 \\ \frac{x^2}{y}=2(y-1)\end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1\end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} y=e \\ x^2=2e(e-1)\end{cases} \iff (x,y)=(0,1) \text{ oppure } (x,y)=(\sqrt{2e(e-1)},e) \text{ oppure } (x,y)=(-\sqrt{2e(e-1)},e).$$

Quindi ci sono 3 punti critici. Corrispondentemente l'Hessiano

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(\ln y-1) & \frac{2x}{y} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2}-2\end{vmatrix} = -2(\ln y-1)\left(\frac{x^2}{y^2}+2\right)-\frac{4x^2}{y^2} \text{ vale:}$$

$H(0,1)=2\cdot 2=4>0$; $H(\pm\sqrt{2e(e-1)},e) = 0-\frac{4(2e(e-1))}{e^2}<0$.

Quindi $(0,1)$ è un estremante locale e precisamente un massimo locale poiché $f_{xx}(0,1)=-2<0$; invece $(\pm\sqrt{2e(e-1)},e)$ sono due punti di sella.

6. L'equazione differenziale $y' = 5(y^2-1)$ è del 1° ordine, a variabili separabili. Tra le sue soluzioni ci sono le due funzioni $y(t)=1$ e $y(t)=-1$, poiché ± 1 annullano la funzione in y di cui y' è prodotto. Visto che $a(t)=5$ e $b(y)=y^2-1$ sono entrambe continue su $\mathbb{R}$, l'equazione ha soluzione e ciascun problema di Cauchy: $y(t_0)=y_0$ ha 1 e 1 sola soluzione. Cerchiamo quella per cui $y(1)=0$.

Separiamo le variabili e integriamo: $\int \frac{dy}{y^2-1} = \int 5\,dt$ cioè, visto che $\frac{1}{y^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)$,

$\frac{1}{2}\left(\ln|y-1| - \ln|y+1|\right) = 5t + c$ o anche

$\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = 10t + 2c.$ (*)

Ora osservo che il valore assunto dalla soluzione in $t=1$ deve essere $0 \in (-1,1) \Rightarrow$ per la soluzione del problema di Cauchy risulterà $\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \frac{1-y}{y+1}$. Inoltre sostituendo nella (*): $t=1$, $y=0$ si trova $\ln 1 = 10+2c \Rightarrow c=-5$

Quindi la soluzione in forma implicita è

$$\ln\left(\frac{1-y}{y+1}\right) = 10t-10$$

Da qui, ricavando y, $\frac{1-y}{y+1} = e^{10t-10} \Rightarrow y = \frac{1-e^{10t-10}}{1+e^{10t-10}}$.

7. Il sistema proposto ha matrice associata completa di termine noto:

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-k & k & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2-k \\ 1-2k & 2 & k+1 & 4 \end{array}\right)$$

Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema sarà risolubile se e solo se $rg(A|b) = rg A$. Per il calcolo di $rg A$ osserviamo che è ≤ 3 (essendo la matrice quadrata d'ordine 3) e non può mai essere < 2 poiché la sottomatrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & k+1 \end{pmatrix}$ ha determinante -2 per qualunque valore di k. Resta da vedere quali valori di k annullano $\det A$ e rendono quindi il rango di $A = 2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1-k & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 1-2k & 2 & k+1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1-k & k \\ 2 & k+1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1-k \\ 1-2k & 2 \end{vmatrix} = 2k^2-2+4k-2+1-3k+2k^2 = 4k^2+k-3 = 0$$

per $k=-1$ e per $k=3/4$.

Quindi $rg A = 2$ per $k=-1$ o $k=3/4$, $rg A = 3$ per $k \neq -1, 3/4$.

È chiaro che se $k \neq -1, 3/4$, $rg(A|\underline{b}) = 3$ (non può essere maggiore dato che le righe sono 3) e quindi il sistema è risolubile con soluzione unica (vedi teor. di Cramer).

Nei restanti casi è più semplice sostituire:

$k=-1$: $(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right)$: si vede che la 3ª riga è somma delle prime due $\Rightarrow$

$\Rightarrow rg(A|\underline{b}) = 2 \Rightarrow$ sistema risolubile con infinite soluzioni dipendenti da $3-2$ parametri (3 = numero incognite, $2 = rg(A|\underline{b})$)

$k=3/4$: $(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/4 & 3/4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5/4 \\ -1/2 & 2 & 7/4 & 4 \end{array}\right)$ ha rango 3 poiché ad es. $\begin{vmatrix} 1 & 1/4 & 1 \\ 2 & 0 & 5/4 \\ -1/2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2(1-2) - 5/4(2+1/8) = 2 - \frac{5 \cdot 17}{32} \neq 0.$

quindi il sistema non è risolubile

8. il numero complesso $w = \dfrac{6-7\sqrt{2} - (6+7\sqrt{2})i}{7+3\sqrt{2}i}$ si scrive in forma algebrica come:

$$w \cdot \frac{7-3\sqrt{2}i}{7-3\sqrt{2}i} = \frac{1}{49+18}\left(7(6-7\sqrt{2}) - 3\sqrt{2}(6+7\sqrt{2}) + i\left(-7(6+7\sqrt{2}) - 3\sqrt{2}(6-7\sqrt{2})\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{67}\left(-67\sqrt{2} + i(-67\sqrt{2})\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

Quindi $|w| = \sqrt{2+2} = 2$ e $\arg w = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ poiché $\cos(\arg w) = \operatorname{sen}(\arg w) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Quindi le sue radici terze hanno modulo $\sqrt[3]{2}$ e argomento $\frac{1}{3}\left(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$ con $k = -1, 0, 1$:

$$z_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}k\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}k\right)\right) \qquad k = -1, 0, 1$$

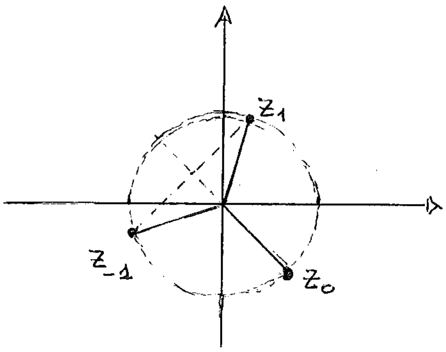
Per ricavarle tutte conviene trovare

$$z_0 = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} - \frac{1}{\sqrt[6]{2}}i$$

e trovare $z_1 = z_0 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$ e $z_{-1} = z_0\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)$; (1)

$$z_1 = \left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}} - \frac{1}{\sqrt[6]{2}}i\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt[6]{2}} + \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt[6]{2}}i$$

$$z_{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}} - \frac{1}{\sqrt[6]{2}}i\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt[6]{2}} + \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt[6]{2}}i$$



(1) Ricordare che $\cos(\alpha+\beta) + i \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)$