1. a) la funzione $f(x)=\sqrt{2x-3/4}-\ln x$ è definita purché lo siano entrambi gli addendi cioè per $\begin{cases} x\geq 3/8\\ x>0\end{cases}$ e quindi è definita in $[3/8,+\infty)$.

In $x=3/8$ la funzione è definita e continua da destra e quindi

$\lim_{x\to 3/8^+} f(x)=f(3/8)=\ln(8/3)$ (che è un numero un po' più piccolo di 1)

Invece $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x}-\ln x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x}\left(1-\frac{\ln x}{\sqrt{2x}}\right)=+\infty$

poiché $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{2x}}=0$ per confronto di infiniti. Poiché $f(x)$ non è asintotica a mx (m costante) non ci possono essere asintoti obliqui (e tanto meno orizzontali dato che il limite non è finito).

b) $f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x-3/4}}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sqrt{2x-3/4}}{x\sqrt{2x-3/4}}\geq 0 \iff \begin{cases}x>3/8\\ x\geq\sqrt{2x-3/4}\end{cases} \iff$ essendo il radicale definito e $x>0$

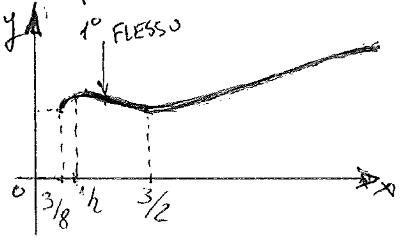
$\begin{cases}x>3/8\\ x^2\geq 2x-3/4\end{cases}\iff\begin{cases}x>3/8\\ (x-1)^2\geq 1/4\end{cases}\iff 3/8<x\leq 1-1/2$ oppure $x\geq 1+1/2$

Quindi $f(x)$ cresce in ciascuno dei due intervalli $(3/8,1/2)$ e $(3/2,+\infty)$; decresce nell'intervallo $(1/2,3/2)$; ha un massimo relativo in $x=1/2$, ove la funzione vale $f(1/2)=1/2+\ln 2$ (che è un numero di poco >1) e un minimo relativo in $x=3/2$, ove la funzione vale $f(3/2)=3/2-\ln 3/2$ (che è un numero positivo $>\ln 8/3$ poiché $\ln 3/2+\ln 8/3=\ln 4<3/2$ essendo $\ln 4^2<3$). Il massimo non è assoluto (poiché la funzione non è superiormente limitata) e il minimo non è assoluto perché $f(3/8)<f(3/2)$. D'altra parte $\forall x\in[3/8,+\infty)$ si ha $f(x)>f(3/8)>0$. Dunque $f(x)$ è sempre positiva e non ha zeri.

c) $f(1)=\frac{\sqrt5}{2}-\ln 1=\frac{\sqrt5}{2}$; $f'(1)=\frac{2}{\sqrt5}-1$ $\Rightarrow$ equazione della retta tangente al grafico in $(1,f(1))$: $y=\sqrt5/2+\left(\frac{2}{\sqrt5}-1\right)(x-1)$.

Invece $\lim_{x\to 3/8^+} f'(x)=\frac{1}{0^+}-\frac{8}{3}=+\infty$: quindi in $(3/8,\ln 8/3)$ la tangente al grafico è parallela all'asse y ed ha equazione $x=3/8$.

d)



e) per quanto riguarda i punti di flesso, la presenza di un massimo e di un minimo relativo (cui corrispondono un intervallo di concavità e uno di convessità) e il fatto che per $x\to+\infty$ $f(x)$ si comporti asintoticamente a $\sqrt{2x}$ che è concava, suggerisce la presenza di 2 flessi. In effetti, derivando $f'(x)=(2x-\frac{3}{4})^{-1/2}-x^{-1}$

si ha $f''(x)=-(2x-3/4)^{-3/2}+x^{-2}=\left[(2x-3/4)^{3/2}-x^2\right]/x^2(2x-3/4)^{3/2}$ che è ≥ 0 se e solo se $\begin{cases}(2x-3/4)^{3/2}\geq x^2\\ x>3/8\end{cases}$ o equivalentemente $\begin{cases}2x-3/4\geq x^{4/3}\\ x>3/8\end{cases}$

Per lo svolgimento della parte facoltativa VEDI ULTIMA PAGINA

Un confronto grafico mostra che per due valori di x vale l'uguaglianza.

2. $x \ln(x^2-1)$ è definita in $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ ed è continua su ciascuno dei due intervalli. Quindi l'integrale indefinito della funzione è un insieme di funzioni ciascuna delle quali ha come intervallo massimale di definizione o $(-\infty,-1)$ o $(1,+\infty)$. La scelta dell'uno o dell'altro intervallo verrà fatta in funzione del problema per cui si cerca l'integrale indefinito.
L'integrale si calcola per sostituzione (immediata): $t = x^2-1$, $dt = 2x\,dx$ e poi per parti:

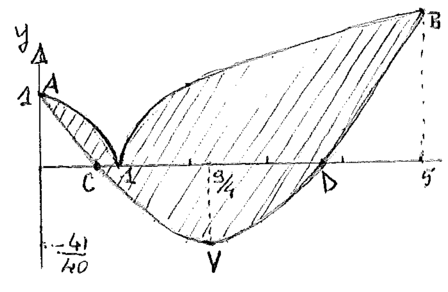
$$\int x \ln(x^2-1)\,dx = \frac{1}{2}\int \ln t\,dt = \frac{1}{2}\left[t\ln t - \int t \cdot \frac{1}{t}\,dt\right] = \frac{1}{2} t(\ln t - 1) + c =$$
$$= \frac{1}{2}(x^2-1)\left(\ln(x^2-1) - 1\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Visto che sviluppando il prodotto si ha l'addendo costante $\frac{1}{2}$, va bene come integrale indefinito anche

$$\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x^2-1) - \frac{1}{2}x^2 + k \quad , k \in \mathbb{R}.$$

3. La funzione $f(x) = \sqrt{|x-1|}$ (che ha per I.D. tutto $\mathbb{R}$) ha grafico che si può ottenere simmetrizzando rispetto alla retta di eq. $x=1$ il grafico traslato di 1 unità nella direzione e verso dell'asse x della funz. $h(x) = \sqrt{x}$ (che è una "mezza parabola", con asse coincidente con l'asse x)
La funzione $f(x)$ è sempre positiva o nulla (in $x=1$ si annulla) e $f(0) = 1$ mentre $f(5) = 2$. Nel punto $x=1$ presenta un minimo che è un punto di rottura cuspidale.
La funzione $g(x) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{9}{5}x + 1$ (che ha per ID tutto $\mathbb{R}$) ha per grafico una parabola convessa con asse di equazione $x = 9/4$ e vertice $V = (9/4, g(9/4)) = (9/4, -\frac{41}{40})$, che interseca l'asse x nei punti (C e D) di ascissa $x = \frac{9 \pm \sqrt{81-40}}{4}$ ed è tale che $g(0) = 1$ e $g(5) = 10 - 9 + 1 = 2$.

Dunque è certo che i due grafici hanno almeno due punti di intersezione in $I = [0,5]$: $A \equiv (0,1)$, $B \equiv (5,2)$. Non hanno altri punti in comune (e più precisamente $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in I$) perché in $\left(\frac{9-\sqrt{41}}{4}, \frac{9+\sqrt{41}}{4}\right)$ $g(x) < 0 < f(x)$, mentre in $\left(0, \frac{9-\sqrt{41}}{4}\right)$ il grafico di $g(x)$ – essendo la funzione convessa – giace tutto "sotto" il segmento AC, mentre quello di $f(x)$ giace palesemente "sopra" tale segmento e analogamente in $\left(\frac{9+\sqrt{41}}{4}, 5\right)$, relativamente al segmento BD.



Dunque Area $(R) = \int_0^5 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^1 (\sqrt{1-x})\,dx + \int_1^5 \sqrt{x-1}\,dx - \int_0^5 \left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{9}{5}x + 1\right)dx =$

$$= \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}\right]_1^5 + \left[-\frac{2}{15}x^3 + \frac{9}{10}x^2 - x\right]_0^5 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(8) - \frac{50}{3} + \frac{45}{2} - 5 = 1 + \frac{35}{6} = \frac{41}{6}.$$

4) la funzione $f(t)=\dfrac{t^{1/2}}{e^{2t}-1}$ è definita e continua in $(0,+\infty)$ (richiesta necessaria perché sia definita la funzione e che rende $\neq 0$ il denominatore)

Quindi $\int_{0+}^{+\infty} f(t)\,dt$ è contemporaneamente integrale improprio di 1ª specie (intervallo illimitato) e di 2° specie ($f(t)$ non definita in un estremo e illimitata sull'intervallo).

Spezzo $\int_{0+}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{0+}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$, rispettivamente integrali di 2ª e 1ª specie,

Per $t \to 0+$ si ha $f(t) \sim \dfrac{t^{1/2}}{2t}$ poiché per $t\to 0+$ si ha $e^{2t}-1 \sim 2t$ e quindi $f(t) \sim \dfrac{1}{2t^{1/2}}$. Poiché $\int_{0+}^{1} \dfrac{1}{2t^{1/2}}\,dt = \lim_{z\to 0+}\left[t^{1/2}\right]_z^1 = 1$ converge, per il criterio del confronto asintotico anche $\int_{0+}^{1} f(t)\,dt$ converge.

Per $t\to+\infty$ si ha $f(t) \sim \dfrac{t^{1/2}}{e^{2t}} = \dfrac{t^{1/2}}{e^t}\cdot\dfrac{1}{e^t}$. Ora $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{e^t}\,dt = \lim_{z\to+\infty}\left[-e^{-t}\right]_1^z = e^{-1}$ converge e, dato che $\lim_{t\to+\infty}\dfrac{t^{1/2}/e^{2t}}{1/e^t} = 0$ (in quanto $\lim_{t\to+\infty}\dfrac{t^{1/2}}{e^t}=0$) per il criterio del confronto asintotico generalizzato anche $\int_1^{+\infty}\dfrac{t^{1/2}}{e^{2t}}\,dt$ converge e per il criterio del conf. asint. converge $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$.

Dunque $\int_{0+}^{+\infty} f(t)\,dt$ è convergente in quanto somma di due integrali convergenti.

5) $f(x,y) = 6x^3 - 2xy^2 + 4y$ in quanto polinomio è continua e dotata di derivate parziali continue (di ogni ordine) su $\mathbb{R}^2$. Quindi per determinare i punti critici basta trovare i punti di $\mathbb{R}^2$ che annullano il suo gradiente $\mathrm{grad} f = (f_x, f_y) = (18x^2 - 2y^2, -4xy + 4)$:

$$\begin{cases} 9x^2 - y^2 = 0 \\ -xy + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \pm 3x \\ \mp 3x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

: è chiaro che l'equazione $y = -3x$ non dà sistema risolubile, quindi questo sistema equivale:

$$\begin{cases} y = 3x \\ 3x^2 - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \sqrt{3} \\ x = \pm 1/\sqrt{3} \end{cases}$$

: i punti critici sono $A = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$, $B = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3}\right)$.

Per studiarli calcolo l'Hessiano (notare che la continuità delle varie derivate comporta $f_{xy} = f_{yx}$: teor. di Schwartz):

$$H(f) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 36x & -4y \\ -4y & -4x \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} 9x & -y \\ -y & -x \end{vmatrix} = -16\,(9x^2 + y^2) < 0$$

in ogni punto di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e quindi in particolare $H(f) < 0$ in A e in B che risultano essere, entrambi, punti di sella

6) l'equazione differenziale $y''+4y = 3\operatorname{sen} t$ è lineare del 2° ordine completa a coefficienti costanti e il termine noto sono continui su $\mathbb{R}$ e quindi in $\mathbb{R}$ sono def. le soluzioni. Cerco le soluzioni dell'equazione omogenea associata: $z''+4z=0$

L'equazione caratteristica associata è $r^2+4=0$ che ha soluzioni immaginarie $r=\pm 2i$.

Quindi l'integrale generale dell'omogenea associata è $z(t)=c_1 \operatorname{sen}(2t)+c_2\cos(2t)$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$

Cerco una soluzione particolare dell'equazione completa tra quelle della forma $\bar y(t)=k\operatorname{sen}t+h\cos t$ (in realtà in questo caso - assenza della derivata prima - basterebbe prendere $\bar y(t)=k\operatorname{sen}t$); ne trovo le derivate

$\bar y' = k\cos t - h\operatorname{sen}t$, $\bar y''=-k\operatorname{sen}t-h\cos t$

e sostituisco nell'eq. differenziale:

$$-k\operatorname{sen}t - h\cos t + 4(k\operatorname{sen}t+h\cos t)=3\operatorname{sen}t$$

deve essere soddisfatta $\forall t\in\mathbb{R}$. Quindi devono annullarsi i coefficienti di sen t e cos t nell'equazione equivalente:

$$(-k+4k-3)\operatorname{sen}t + 3h\cos t=0$$

cioè $\begin{cases} h=0 \\ 3k-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ h=0 \end{cases}$

L'integrale generale dell'eq. diff data è dunque $y(t)=\operatorname{sen}t + c_1\operatorname{sen}(2t)+c_2\cos(2t)$ con c_1,c_2 variabili in $\mathbb{R}$.

Perché valgano le condizioni di Cauchy $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=-1 \end{cases}$

dato che $y'(t)=\cos t+2c_1\cos 2t-2c_2\operatorname{sen}2t$, dovrà essere soddisfatto il sistema

$\begin{cases} \sin 0 + c_1\sin 0 + c_2\cos 0 = 1 \\ \cos 0 + 2c_1\cos 0 - 2c_2\sin 0 = -1 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} c_2=1 \\ 1+2c_1=-1 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} c_2=1 \\ c_1=-1 \end{cases}$

Dunque la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(t)=\operatorname{sen}t-\operatorname{sen}2t+\cos 2t$$

7) Il sistema

$$\begin{cases} y+2z=-3/2 \\ kx-z=1/2 \\ 5x+2y=-1 \end{cases}$$

è risolubile se e solo se il rango della matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ k & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ coincide con quello della matrice $(A|\underline{b})=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -3/2 \\ k & 0 & -1 & 1/2 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$ orlata con la colonna dei termini noti. Osservo che A è quadrata: quindi per determinarne il rango conviene vedere se ci sono valori di k che annullano $\det A$ e poi eventualmente controllare tali valori.

$\det A = -1\begin{vmatrix} k & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} k & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -5+4k=0 \Leftrightarrow k=5/4$.

Quindi se $k\neq 5/4$, $\operatorname{rg} A=3$ e il sistema ammette 1 ed 1 sola soluzione del tipo

$$(x,y,z)=\left(\frac{1}{4k-5}\begin{vmatrix} -3/2 & 1 & 2 \\ 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \frac{1}{4k-5}\begin{vmatrix} 0 & -3/2 & 2 \\ k & 1/2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \frac{1}{4k-5}\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3/2 \\ k & 0 & 1/2 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}\right)=$$

$$=\left(\frac{2-2}{4k-5}, \frac{-2k-5+15/2}{4k-5}, \frac{5/2-2k}{4k-5}\right)=(0,-1/2,-1/2)$$

(METODO di CRAMER)

Se invece $k = 5/4$ la matrice A ha rango 2 (poiché ad es. contiene almeno la sottomatrice $\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}$ che ha determinante diverso da zero). Quanto alla matrice

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0&1&2&-3/2\\ 5/4&0&-1&1/2\\ 5&2&0&-1\end{array}\right)$$

, orlando la matrice a det. $\neq 0$ $\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}$ nei due modi possibili (METODO di KRONECKER) si ha, in un caso la matrice A di cui sappiamo che il determinante è nullo, nell'altro la matrice $\begin{pmatrix}1&2&-3/2\\0&-1&1/2\\2&0&-1\end{pmatrix}$ che ha determinante

$$1\cdot\begin{vmatrix}-1&1/2\\0&-1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2&-3/2\\-1&1/2\end{vmatrix} = 1+2\left(1-\tfrac{3}{2}\right)=0.$$

Quindi anche $(A|\underline{b})$ ha rango 2 e il sistema è risolubile con ∞^1 soluzioni. Ciò significa che una delle equazioni è combinazione lineare delle altre (ad es. visto che si è detto che $\begin{vmatrix}1&2\\0&-1\end{vmatrix}\neq 0$ si può asserire che l'ultima eq. dipende dalle prime 2) e quindi può essere "trascurata" in quanto non dà informazioni aggiuntive. Il sistema

$$\begin{cases} y+2z = -3/2\\ \frac{5}{4}x - z = 1/2\end{cases}$$

può essere risolto per sostituzione

$$\begin{cases} z = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}\\ y = -\frac{5}{2}x + 1 - \frac{3}{2}\end{cases}$$

e quindi ha soluzioni del tipo $(x,y,z) = \left(t, -\frac{5}{2}t - \frac{1}{2}, \frac{5}{4}t - \frac{1}{2}\right)$ al variare di t in $\mathbb{R}$.

8). Il numero complesso $w = 1-\sqrt{3}i$ ha modulo 2 e argomento $-\frac{\pi}{3}$ (poiché il suo coseno è $1/2$ e il suo seno è $-\sqrt{3}/2$). Le sue radici quarte hanno modulo $\sqrt[4]{2}$ e argomento $\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)/4 = -\pi/12 + k\pi/2$ con $k=-1,0,1,2$ (se si vogliono indicare gli argomenti principali). Osserviamo che $-\pi/12 = \pi/4 - \pi/3$ e quindi

$$\cos(-\pi/12) = \cos\pi/4\cos\pi/3 + \operatorname{sen}\pi/4\operatorname{sen}\pi/3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

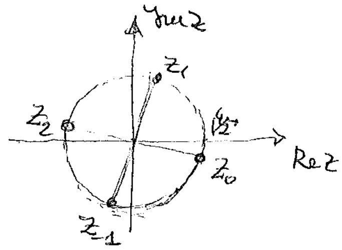
$$\operatorname{sen}(-\pi/12) = \operatorname{sen}\pi/4\cos\pi/3 - \operatorname{sen}\pi/3\cos\pi/4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

Dunque la radice di argomento $-\pi/12$ è $z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\,\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt[4]{2}} + i\,\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt[4]{2}}$

quella di argomento $5\pi/12$ è $z_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt[4]{2}} + i\,\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt[4]{2}}$

quella di argomento $11\pi/12$ è $z_2 = -z_0 = -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt[4]{2}} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt[4]{2}}$

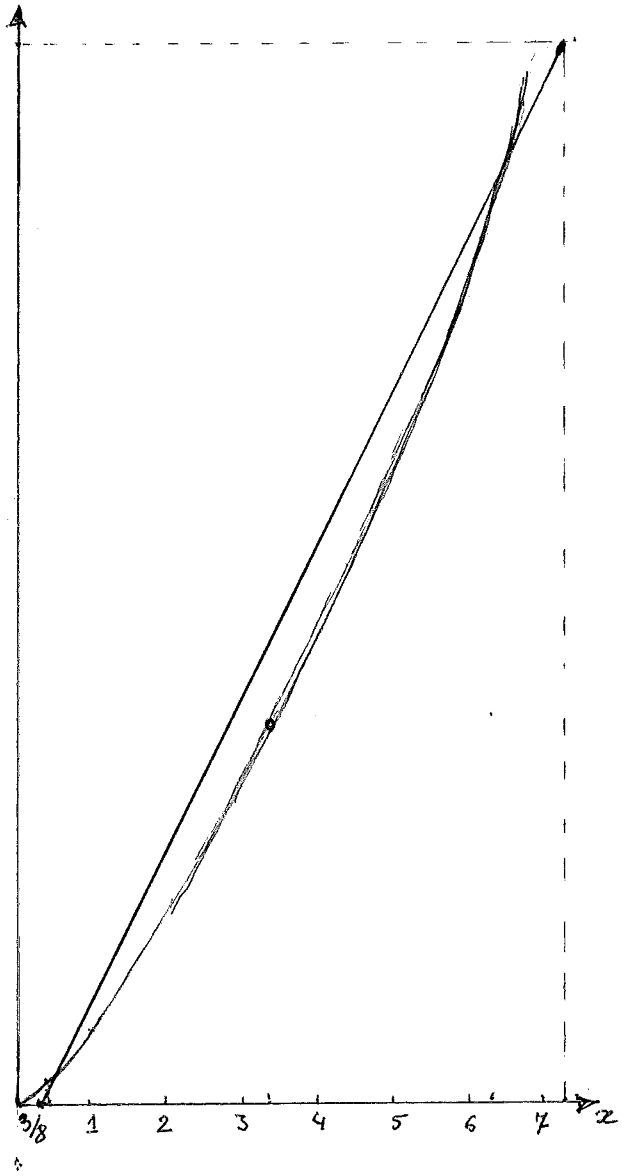
quella di argomento $7\pi/12$ è $z_{-1} = -z_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt[4]{2}} - i\,\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt[4]{2}}$



Esercizio 1, parte facoltativa.

Si è detto che $f''(x)\geq 0 \iff \begin{cases} 2x-3/4 \geq x^{4/3} \\ x>3/8 \end{cases}$

Rappresentiamo nel quadrante $x>0,\ y>0$ le due funzioni $h(x)=2x-3/4$ e $k(x)=x^{4/3}$ (si osservi che se $x>3/8$ come richiesto $h(x)>0$!)



Notiamo che

per $x=1/2$: $h(1/2)<k(1/2)$ in quanto
$h(1/2)=1/4$ e $k(1/2)=1/2\sqrt[3]{1/2}$ e $\sqrt[3]{1/2}>1/2$ (proprietà delle potenze per basi <1)

per $x=1$: $h(1)>k(1)$ in quanto
$h(1)=5/4$ mentre $k(1)=1$

Ne consegue (teorema degli zeri, applicato alla funzione continua $h(x)-k(x)$) che i due grafici devono intersecarsi almeno 1 volta nell'intervallo $[1/2, 1]$ e quindi $f(x)$ ha almeno 1 flesso in tale intervallo.

Similmente

per $x=6$: $h(6)>k(6)$ in quanto
$h(6)=12-3/4$, $k(6)=6\sqrt[3]{6}$ e

$h(6)>k(6) \iff 2-1/8>\sqrt[3]{6} \Leftarrow (2-1/8)^3>6 \iff$

$8-\frac{3}{2}+\frac{3}{32}-\frac{1}{512}>6 \iff \frac{1}{2}+\frac{3}{32}-\frac{1}{512}>0$ VERO

mentre per $x=7$: $h(7)<k(7)$ in quanto
$h(7)=14-3/4$ $k(7)=7\sqrt[3]{7}$ e

$h(7)<k(7) \iff 2-3/28<\sqrt[3]{7} \iff (2-3/28)^3<7 \iff$

$8-9/7+27/28\cdot 14-27/28^3<7 \iff -2/7+\frac{27}{28}\left(\frac{1}{14}-\frac{1}{28^3}\right)<0$

VERO in quanto il secondo addendo è $<1/14$.

Quindi una seconda intersezione si realizza nell'intervallo $[6,7]$.

Per convincersi che le intersezioni sono solo due basta studiare:

$h(x)-k(x)$

$h'(x)-k'(x)=2-\frac{4}{3}x^{1/3}>0 \iff x<\frac{27}{8}$ e $h(27/8)-k(27/8)=6-\frac{81}{16}=\frac{15}{16}>0$

Poiché $h(3/8)-k(3/8)<0$ e $h(27/8)-k(27/8)>0$ e la funzione $h(x)-k(x)$ è monotona (e continua) in $[3/8, 27/8]$ la funzione ha un solo zero in tale intervallo (quello meglio localizzato prima tra $1/2$ e 1)

Poiché $h(27/8)-k(27/8)>0$ e $h(7)-k(7)<0$ e la funzione $h(x)-k(x)$ è monotona (e continua) in $[27/8, 7]$ la funzione $h(x)-k(x)$ ha un solo zero in tale intervallo (quello localizzato meglio prima nell'intervallo $[6,7]$).

Poiché $h(x)-k(x)$ decresce in $[7,+\infty)$ non ci sono altri zeri. E quindi ci sono esattamente 2 flessi per $f(x)$.