Istituzioni di Matematica per Chimica F45 e F5X (21/2/2013)

1. $f(x) = \left(1 - \frac{8}{x}\right)\sqrt{x^2-1}$

a) è definita purché $\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ cioè in $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$;

è positiva purché $\begin{cases} \left(1-\frac{8}{x}\right) > 0 \\ x \in \mathrm{D}, \ x \neq \pm 1 \end{cases}$ cioè per $x<-1$ o per $x>8$

è negativa per $x \in (1,8)$

è nulla per $x = \pm 1$ e per $x = 8$.

b) Come già detto, $f(\pm 1) = 0$ e $f(x)$ è continua da sinistra in $x=-1$ e da destra in $x=0$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2-1} - 8 \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

: il primo limite vale $+\infty$ in quanto per $x \to \pm\infty$ $\sqrt{x^2-1} \sim |x| \to +\infty$. Il secondo per lo stesso motivo tende a $-8 \cdot \mathrm{sgn}\, x$ (quindi -8 se $x \to +\infty$, 8 se $x \to -\infty$)

Quindi la funzione è in entrambi i casi divergente a $+\infty$ e

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

Per trovare i due asintoti calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} \left[\left(\sqrt{x^2-1} - x\right) - \frac{8\sqrt{x^2-1}}{x} \right] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} - \frac{8\sqrt{x^2-1}}{x} \right) = -8$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x)+x) = \lim_{x\to-\infty} \left[\left(\sqrt{x^2-1} + x\right) - 8\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \right] = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}-x} - \frac{8\sqrt{x^2-1}}{x} \right) = 8$$

Quindi per $x \to +\infty$ l'asintoto è $y = x - 8$
per $x \to -\infty$ l'asintoto è $y = -x + 8$

c) $$f'(x) = \frac{8}{x^2}\sqrt{x^2-1} + \left(1-\frac{8}{x}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\cancel{8x^2} - 8 + x^3 - \cancel{8x^2}}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2\sqrt{x^2-1}} > 0$$

purché f' sia definita (cioè $x \in (-\infty,-1)$ o $x \in (1,+\infty)$) e sia $x > 2$.

Quindi

$f'(x) > 0$ per $x > 2$ $\Rightarrow$ f è crescente in $(2,+\infty)$

$f'(x) < 0$ per $x < -1$ o per $x \in (1,2)$ $\Rightarrow$ f è decrescente in $(-\infty,-1)$ e in $(1,2)$

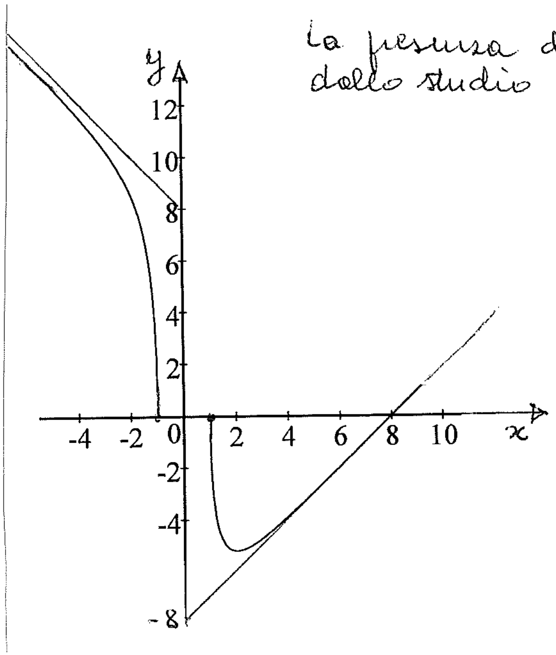
e in $x = 2$ la funzione presenta un minimo relativo e assoluto.

$f(2) = -3\sqrt{3}$.

d) $f(8) = 0$, $f'(8) = \frac{3}{8}\sqrt{7} + 0$ $\Rightarrow$ la retta tangente in $(8,0)$ ha equazione $y = \frac{3\sqrt{7}}{8}(x-8)$.

Notiamo che l'asintoto per $x \to +\infty$ passa per $(8,0)$ e ha coefficiente angolare $1 > \frac{3\sqrt{7}}{8}$. Quindi il grafico in corrispondenza a tale punto passa da sopra l'asintoto a sotto l'asintoto: per potersi riavvicinare all'asintoto, senza intersecarlo(*) nuovamente deve avere un flesso.

(*) L'unica intersezione tra il grafico e l'asintoto è in $(8,0)$ poiché $\frac{(x-8)}{x}\sqrt{x^2-1} = x-8$ implica $x = 8$ o $\sqrt{x^2-1} = x$: equazione impossibile.



La presenza di un flesso in $(8,+\infty)$ è evidenziato anche dallo studio della derivata seconda.

$$y'' = \frac{3x^4\sqrt{x^2-1} - (x^3-8)\left(2x\sqrt{x^2-1} + \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}\right)}{x^4(x^2-1)} =$$

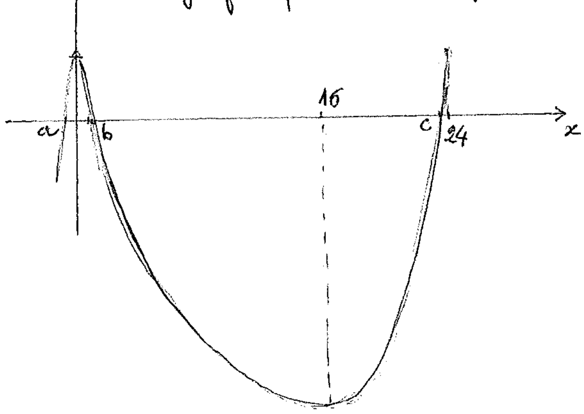
$$= \frac{x\left(3x^5-3x^3-(x^3-8)(3x^2-2)\right)}{x^4(x^2-1)^{3/2}} =$$

$$= \frac{x(-x^3+24x^2-16)}{x^4(x^2-1)^{3/2}} \geq 0 \iff$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty,-1) \text{ o } x \in (1,+\infty) \\ x(x^3-24x^2+16) \leq 0 \end{cases}$$

la funzione $p(x)=x^3-24x^2+16$ ha derivata $p'(x)=3(x^2-16x)\geq 0$ per $x\leq 0$ e per $x\geq 16$ e poiché $p(0)=16>0$, $p(16)=16^2(-8)+16<0$ ha uno zero tra 0 e 16 (anzi tra 0 e 1 poiché $p(1)=1-8<0$); inoltre poiché $p(-1)=-1-8<0$ ha un altro zero compreso tra -1 e 0 e infine poiché $p(24)=16>0$ mentre $p(23)=-23^2+16<0$ c'è uno zero tra 23 e 24.

grafico qualitativo di $p(x)$



Quindi $p(x)>0$ per $x\in(a,b)$ e per $x>c$;
$x\,p(x)<0$ per $b<x<c$ e per $a<x<0$
e visto che $|a|<1$ e $|b|<1$
$y''>0$ in $(1,c)$ mentre
$y''<0$ in $(-\infty,-1)$ e in $(c,+\infty)$
Quindi $f(x)$ ha un flesso in $x=c$, è convessa in $(1,c)$ e concava in $(-\infty,-1)$ e in $(c,+\infty)$.

Questa discussione non è richiesta!!

2. $f(x) = \dfrac{x\cos(2x^2)}{(\operatorname{sen}(2x^2))^2}$ è definita purché $\operatorname{sen} 2x^2 \neq 0$ cioè per $2x^2 \neq k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ e ≥ 0

Di conseguenza sarà continua in ciascuno degli intervalli del tipo $\left(\sqrt{\frac{k\pi}{2}}, \sqrt{\frac{(k+1)\pi}{2}}\right)$ o del tipo $\left(-\sqrt{\frac{(k+1)\pi}{2}}, -\sqrt{\frac{k\pi}{2}}\right)$, non sulla loro unione

$\int f(x)dx$ è un integrale che si calcola per sostituzione immediata

$$t = \operatorname{sen}(2x^2) \Rightarrow dt = 4x\cos(2x^2)dx \Rightarrow x\cos(2x^2)dx = \frac{1}{4}dt$$

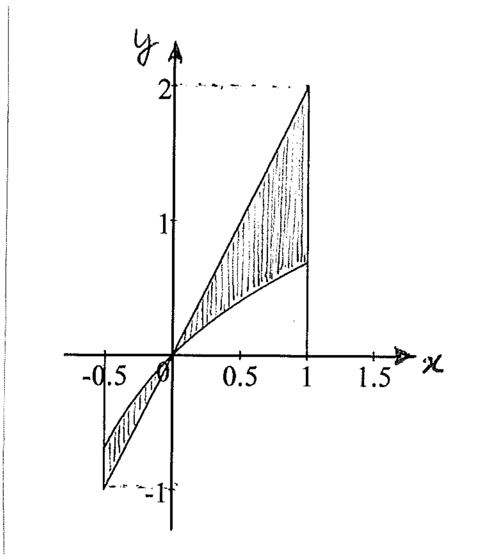
Quindi

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{4t^2}dt = -\frac{1}{4t} + c = -\frac{1}{4\operatorname{sen}(2x^2)} + c$$

e gli intervalli massimali di definizione delle primitive sono quelli su cui la funzione è continua.

3. $f(x) = \ln(x+1)$ è una funzione logaritmica composta con una traslazione e quindi il suo grafico è traslato di quello di $\ln x$ di 1 unità nella direzione dell'asse x e in verso opposto. (al di fuori del dominio $[-1/2, 1]$ ha un asintoto verticale $x=-1$).

$f(x)$ ha grafico che interseca $x=-\frac{1}{2}$ in $y=-\ln 2$ e $x=1$ in $y=\ln 2$, e ha tangente in $(0,0)$ di equazione $y=x$. Essendo una funzione concava, tutto il suo grafico "giace al di sotto" di tale retta (escludendo l'origine, che le appartiene). Quest'osservazione garantisce in particolare che in $(0,1]$ si ha $f(x) < x < 2x = g(x)$ e che quindi l'area della regione compresa tra i due grafici e le rette di equazioni $x=-1/2$ e $x=1$ non può essere minore dell'area del triangolo formato dalle rette di equazione $y=2x$, $y=x$ e $x=1$ che ha base 1 e altezza 1 e quindi area $1/2$ (SE TROVO UN VALORE PIÙ PICCOLO È UN ERRORE GRAVE!)



Invece in $[-\frac{1}{2}, 0)$ si ha $f(x) > 2x$. Infatti, sempre per la concavità di $f(x)=\ln(x+1)$, il grafico di $f(x)$ "giace sopra" la secante che congiunge i due punti del suo grafico $(-\frac{1}{2}, -\ln 2)$ e $(0,0)$ e che ha coefficiente angolare $2\ln 2 < 2$ e quindi risulta a sua volta giacere sopra la retta $y=2x$ per tutti gli $x<0$.
Quindi la regione richiesta è quella tratteggiata e la sua area vale

$$\mathcal{A} = \int_{-1/2}^{0} (f(x)-g(x))\,dx + \int_{0}^{1} (g(x)-f(x))\,dx.$$

Cerco una primitiva per $f(x)-g(x)$

$$\int (\ln(1+x) - 2x)\,dx \underset{\text{p.p. dopo aver scomposto}}{=} x\ln(x+1) - \int \frac{x+1-1}{x+1}\,dx - x^2 =$$

$$= x\ln(x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx - x^2 = x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) - x^2 + c =$$

$$= (x+1)\ln(x+1) - x - x^2 + c$$ (dove nell'ultimo integrale non si è messo $\ln|\ |$ perché per ipotesi $x>-1$)

$$\Rightarrow \mathcal{A} = \left[(x+1)\ln(x+1) - x - x^2\right]_{-1/2}^{0} + \left[x^2+x-(x+1)\ln(x+1)\right]_{0}^{1} =$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + 1 + 1 - 2\ln 2 - 0 = \frac{1}{2}\ln 2 - 2\ln 2 - \frac{1}{4} + 2 = \frac{7}{4} - \frac{3}{2}\ln 2$$

4. Per provare che $e^t + e^{-t} > t$ osserviamo che $\forall t \in \mathbb{R}: e^t \geq 1+t > t$ (in quanto convessa e quindi $\geq$ dei valori assunti nei punti di ascissa corrispondente che stanno sulla tangente al suo grafico nell'origine). Poiché $e^{-t} > 0$ si ha ovviamente $e^t + e^{-t} > t + 0 = t$.
Ciò garantisce che $f(t) = \frac{1}{e^t + e^{-t} - t}$ abbia sempre denominatore diverso da zero (e quindi sia definita e continua su $\mathbb{R}$) e sia positiva su $\mathbb{R}$. Per stabilire se $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge è quindi lecito usare il criterio del confronto asintotico.
Per $t \to +\infty$: $\frac{e^t + e^{-t} - t}{e^t} \to 1$ e quindi $f(t) \sim \frac{1}{e^t}$; per $t \to -\infty$: $\frac{e^t + e^{-t} - t}{e^{-t}} \to 1$ e quindi $f(t) \sim \frac{1}{e^{-t}}$

ora $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t}\,dt = \lim_{z\to+\infty} (-e^{-z}+e^0) = 1$ converge e quindi converge anche $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

Similmente $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{e^{-t}}\,dt = \lim_{z\to-\infty} (e^0 - e^z) = 1$ converge e quindi converge anche $\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt$.

Quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge in quanto somma di due integrali convergenti.

5) La funzione $f(x,y) = x^3 + x^2y + y^2 - 4y$ è un polinomio e come tale continua con le sue derivate parziali prime e seconde in tutto $\mathbb{R}^2$. Quindi i punti critici possono essere individuati stabilendo dove si annulla il gradiente di f : $\operatorname{grad} f = (f_x, f_y)$.

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy \qquad f_y(x,y) = x^2 + 2y - 4 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} f = (0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} x(3x+2y)=0 \\ x^2+2y-4=0 \end{cases}$$

Questo sistema si spezza nei due sistemi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases}$$

e quindi le sue soluzioni sono date dai punti

$A = (0,2)$ e $B_1 = (-1, 3/2)$ e $B_2 = (4,-6)$

Questi sono i punti critici.

L'Hessiano $H_f(x,y) = \begin{vmatrix} 6x+2y & 2x \\ 2x & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 3x+y & x \\ x & 1 \end{vmatrix}$

- nel punto $A=(0,2)$ vale $H_f(0,2) = 4\cdot 2\cdot 1 > 0$ e poiché $f_{yy}(0,2) = 2 > 0$ il punto A è un minimo locale (forte)
- nei punti B_i vale $4\begin{vmatrix} \frac{3}{2}x & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = 4x(3/2 - x)$ e quindi in entrambi i casi è < 0.

Dunque B_1 e B_2 sono punti di sella.

6) a) L'equazione differenziale $y' = \frac{y(3-y)}{t}$ è del 1° ordine a variabili separabili; le due funzioni di cui è prodotto sono $a(t) = \frac{1}{t}$ che è continua in ciascuno dei due intervalli $(-\infty,0)$ e $(0,+\infty)$ e $b(y) = 3(3-y)$ che è continua con derivata prima continua in $(-\infty,+\infty)$. Ha soluzioni costanti $y=0$ e $y=3$ che non sono soluzioni del problema di Cauchy $y(-1)=1$. La soluzione del problema di Cauchy esiste ed è unica (per la continuità cui si accennava più sopra) e se deve essere definita in $t=-1$ il dominio di tale soluzione è l'intervallo $(-\infty,0)$ che contiene tale punto. Notiamo anche che $y=1\in(0,3)$ e visto che la funzione : $\frac{1}{y(3-y)}$ di cui dovremo calcolare le primitive è continua nei singoli

intervalli $(-\infty,0)$, $(0,3)$, $(3,+\infty)$ e che la sol. deve avere un valore in $(0,3)$, l'immagine della soluzione sarà $(0,3)$

b) Procediamo a separare le variabili

$$\int \frac{dy}{y(3-y)} = \int \frac{dt}{t}$$

e poiché $\frac{A}{y} + \frac{B}{y-3} = \frac{1}{y(3-y)} \iff (A+B)y - 3A = -1$

$\iff A = \frac{1}{3} \quad B = -\frac{1}{3}$ e quindi

$\int \frac{dy}{y(3-y)} = \frac{1}{3}\int \frac{dy}{y} - \frac{1}{3}\int \frac{dy}{y-3}$ si trova che deve risultare

$$\frac{1}{3} \ln\left|\frac{y}{y-3}\right| = \ln|t| + c.$$

Il problema di Cauchy implica: $\frac{1}{3} \ln\left|\frac{1}{-2}\right| = \ln|-1| + c$ cioè $c = \frac{-\ln 2}{3}$.

Per la precedente analisi su dominio e immagine di tale soluzione si ricava che per essa $\left|\frac{y}{y-3}\right| = \frac{y}{3-y}$ e $\ln|t| = \ln(-t)$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy in forma implicita è

$\frac{1}{3} \ln\left(\frac{y}{3-y}\right) = \ln(-t) - \frac{1}{3}\ln 2$ o anche $\ln\left(\frac{y}{3-y}\right) = \ln\left(\frac{-t^3}{2}\right)$

Ciò equivale a $\frac{y}{3-y} = \frac{-t^3}{2}$ cioè $y(2-t^3) = -3t^3$.

quindi la soluzione cercata è $y(t) = \frac{3t^3}{t^3-2}$.

Verifichiamo che questa è la soluzione. Innanzi tutto $y(-1) = \frac{3\cdot(-1)}{-1-2} = 1$.

Inoltre $y(t) = 3 + \frac{6}{t^3-2}$ ha derivata $y'(t) = \frac{-18t^2}{(t^3-2)^2}$

e $\frac{1}{t}\, y(t)\,(3 - y(t)) = \frac{1}{\cancel{t}} \; \frac{3t^{\cancel{3}\,2}}{t^3-2} \cdot \frac{-6}{t^3-2} = \frac{-18t^2}{(t^3-2)^2}$

i due membri dell'eq. differenziale coincidono $\forall t$ in $(-\infty,0)$

7) Per stabilire per quali valori di k la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & k & 3 \\ -k & 0 & -2 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ non è invertibile basta vedere quali valori di k annullano il suo determinante; lo calcolo lungo la 2ª riga

$$\det A = k \begin{vmatrix} k & 3 \\ 1 & k \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = k^3 - 3k + 4 - 2k = k^3 - 5k + 4.$$

Ovviamente il polinomio $k^3 - 5k - 4$ si annulla per $k=1$ e (teor di Ruffini)

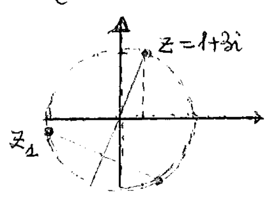
$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -5 & 4 \\ 1 & & 1 & 1 & -4 \\ \hline & 1 & 1 & -4 & 0 \end{array}$$

si scompone così: $\det A = (k-1)(k^2+k-4)$.

Quindi $\det A$ si annulla per $k=1$ e per $k = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Per tutti e 3 questi valori $\operatorname{rg} A < 3$ ed è esattamente $= 2$ poiché la sottomatrice $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ ha determinante $2 \neq 0$ e quindi A contiene una sottomatrice quadrata di ordine 2 a determinante non nullo.

8) Se $z = 1+3i$ è la radice terza di un numero complesso w, le restanti radici terze di w si ottengono per rotazione di $\frac{2\pi}{3}$ e $-\frac{2\pi}{3}$ di tale radice (le tre radici devono essere i vertici di un triangolo equilatero centrato nell'origine)



$$z_1 = z\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right) = (1+3i)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1+3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-3}{2}\, i$$

$$z_2 = z\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i \,\mathrm{sen}\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right) = (1+3i)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+3}{2}\, i$$