Istituzioni di Matematica per Chimica F5X – (18/7/2013)

Soluzioni

1\. a) $f(x) = \ln(3x^2+5x) - \frac{8}{5}x$

è definita perché $3x^2+5x > 0$ cioè in $(-\infty, -5/3) \cup (0, +\infty)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln(3x^2) - \frac{8}{5}x = \lim_{x \to -\infty} \ln 3 + 2\ln|x| - \frac{8}{5}x = +\infty$

poiché $\ln|x| \to +\infty$ e $-\frac{8}{5}x \to +\infty$ per $x \to -\infty$. Non ci sono asintoti obliqui poiché $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{8}{5}$ ma $\lim_{x \to -\infty} f(x) + \frac{8}{5}x =$
$= \lim_{x \to -\infty} \ln 3 + 2\ln|x| = +\infty$

$\lim_{x \to -5/3^-} f(x) = -\infty$: per $x \to -\frac{5}{3}^-$ si ha asintoto verticale $x = -\frac{5}{3}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$: per $x \to 0^+$ si ha asintoto verticale $x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln 3 + 2\ln|x| - \frac{8}{5}x = [\infty - \infty] =$

$= \lim_{x \to +\infty} -\frac{8}{5}x \left(1 - \frac{5}{4} \cdot \frac{\ln x}{x} - \frac{5\ln 3}{8x}\right) = \lim_{x \to +\infty} -\frac{8}{5}x = -\infty$

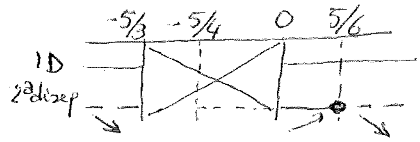
senza asintoti obliqui per lo stesso motivo visto per $x \to -\infty$.

b) $f'(x) = \frac{6x+5}{3x^2+5x} - \frac{8}{5} = \frac{30x+25-24x^2-40x}{5(3x^2+5x)} = \frac{-(24x^2+10x-25)}{5(3x^2+5x)} \geq 0$

$\iff \begin{cases} x \in (-\infty, -5/8) \cup (0, +\infty) & \text{(I.D. tanto di } f(x) \text{ che di } f'(x)) \\ 24x^2+10x-25 \leq 0 \end{cases}$

e poiché $24x^2+10x-25 = 0$ per $x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24 \cdot 25}}{24} = \begin{cases} \frac{20}{24} = \frac{5}{6} \\ -\frac{30}{24} = -\frac{5}{4} \end{cases}$

e $-5/4 \notin (-\infty, -5/8) \cup (0, +\infty)$ si vede che:



$f'(x) \geq 0 \iff x \in (0, 5/6]$

Quindi f cresce in $(0, 5/6)$, decresce in $(-\infty, -5/3)$ e in $(5/6, +\infty)$ e ha un massimo relativo in $x = 5/6$

Risulta $f(5/6) = \ln\left(3 \cdot \frac{5^2}{6^2} + \frac{5^2}{6}\right) - \frac{8}{5} \cdot \frac{5}{6} = \ln\left(\frac{5^2}{6} \cdot \frac{3}{2}\right) - \frac{4}{3} = 2\ln\frac{5}{2} - \frac{4}{3} > 0.$

c) nel punto di ascissa $x = 5$ si ha $f(5) = \ln(3 \cdot 25 + 25) - 8 = 2\ln 10 - 8$

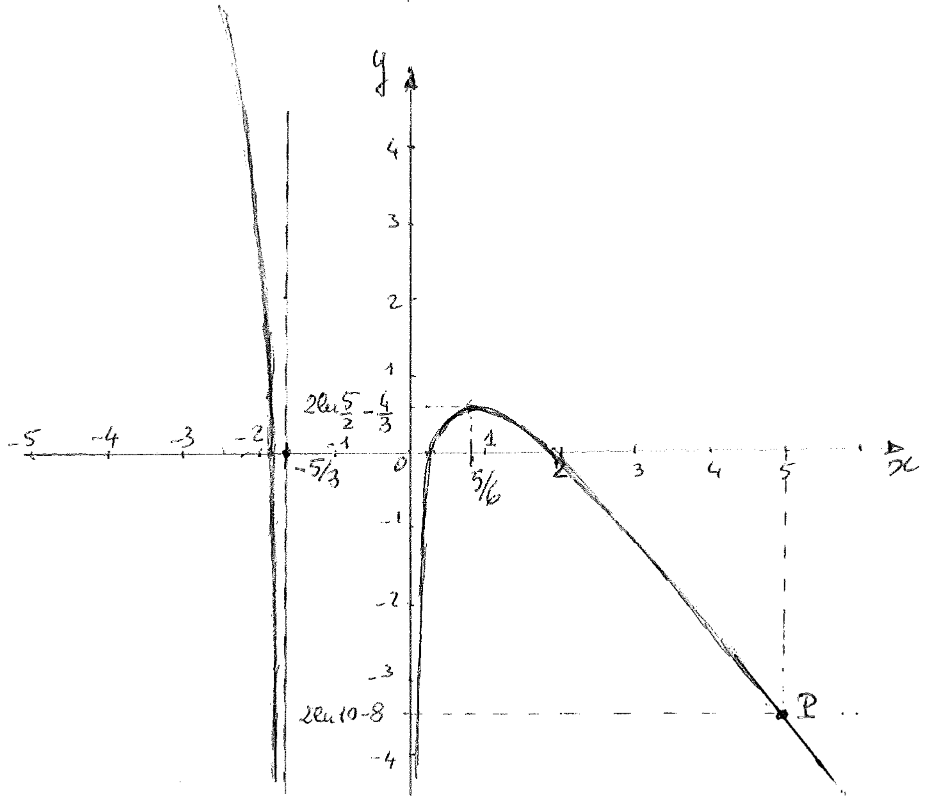
$f'(5) = \frac{7 \cdot 5}{4 \cdot 25} - \frac{8}{5} = \frac{7}{20} - \frac{8}{5} = -\frac{25}{20} = -\frac{5}{4}.$

Quindi l'equazione della retta tangente al grafico in $P = (5, f(5))$ è $y = 2\ln 10 - 8 - \frac{5}{4}(x-5)$ o, se si preferisce, $y = 2\ln 10 - \frac{7}{4} - \frac{5}{4}x$.

d) $f''(x) = \frac{6(3x^2+5x) - (6x+5)(6x+5)}{(3x^2+5x)^2} = \frac{-18x^2-30x-25}{(3x^2+5x)^2} < 0 \quad \forall x \in \text{I.D.}$

poiché il polinomio $-(18x^2+30x+25)$ ha discriminante:
$4(15^2 - 18 \cdot 25) = 4(3^2 5^2 - 2 \cdot 3^2 5^2) < 0.$

Quindi su ciascuno dei due intervalli di definizione la funz. è concava.



Poichè $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to -5/3^-} f(x) = -\infty$ c'è 1 zero nell'intervallo $(-\infty, -5/3)$, per il teorema degli zeri applicato a un opportuno sottointervallo chiuso.
In tale intervallo ce n'è 1 solo poichè la funzione è strettamente monotona (decrescente).
Poichè $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ e $f(5/6) > 0$ c'è uno zero nell'intervallo $(0, 5/6)$ e 1 solo poichè in tale intervallo la funzione è strett. monotona (crescente).
Poichè $f(5/6) > 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ c'è uno zero nell'intervallo $(5/6, +\infty)$ e uno solo poichè in tale intervallo la funz. è strett. monotona (decresc.)

[Volendo localizzare i 3 zeri (cosa non richiesta dal problema) si osservi che $f(-2) = \ln 2 + \frac{16}{5} > 0$ e quindi il primo zero sta nell'intervallo $(-2, -5/3)$. Invece $f(1/4) = \ln\left(\frac{3}{16}+\frac{5}{4}\right) - \frac{2}{5} = \ln\left(1+\frac{7}{16}\right) - \frac{2}{5} < 0$ [come si può verificare anche a mano utilizzando lo sviluppo di Maclaurin: $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$ $t = \frac{7}{16}$ e osservando che visto che il primo termine che si trascura è $-\frac{t^4}{4} < 0$ si ha

$$\ln(1+t) < t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} = \frac{7}{16}\left(1 - \frac{7}{2\cdot 16} + \frac{7^2}{3\cdot 16^2}\right) = \frac{7}{16}\left(1 - \frac{7\cdot 3\cdot 16 - 7^2\cdot 2}{2\cdot 3\cdot 16^2}\right) = \frac{7}{16}\left(1 - \frac{7\cdot 34}{48\cdot 32}\right)$$ e quindi

$$f\left(\tfrac14\right) < \frac{3}{80} - \frac{49\cdot 34}{16\cdot 48\cdot 32} < \frac{3}{80} - \frac{1}{16} = -\frac{1}{40}$$] mentre $f\left(\frac13\right) = \ln\left(\frac13 + \frac53\right) - \frac{8}{15} = \ln 2 - \frac{8}{15} > 0$

e quindi il secondo zero sta nell'intervallo $(1/4, 1/3)$.
Per finire, $f(1) = \ln 8 - \frac{8}{5} > 0$ mentre $f(2) = \ln(12+10) - \frac{16}{5} = \ln 22 - \left(3 + \frac{1}{5}\right) < 0$

[come si può verificare osservando che $e^{3+1/5} = e^3 \cdot e^{1/5} > 2{,}7^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{5}\right)$, ove si è sfruttato l'approssimazione $2{,}7 < e < 2{,}8$ e lo sviluppo di MacLaurin arrestato al 1° ordine $e^t = 1 + t + o(t)$ ove $o(t)$ è una quantità positiva essendo $t > 0$, e d'altra parte $2{,}7^3\left(1+\frac15\right) = 19{,}683\left(1+\frac15\right) > 19 + 3$ e quindi $\ln 22 - (3 + 1/5) = \ln \frac{22}{e^{3+1/5}} < 0$ poichè l'argomento è minore di 1]. Dunque il terzo zero si trova nell'intervallo $(1,2)$.

È poi ovvio che $f(x)$ risulta positiva tra $-\infty$ e il primo zero e tra il secondo e il terzo zero mentre è negativa altrove, visti gli intervalli di monotonia della funzione.

2. La funzione $\frac{\sqrt{x}}{1+3\sqrt{x}}$ è definita e continua purché sia definita la radice (cioè in $[0,+\infty)$) in quanto il denominatore, essendo somma di 1 e di una quantità non negativa, non si annulla mai. Ogni primitiva ha come intervallo massimale di definizione l'intervallo massimale di continuità di $\frac{\sqrt{x}}{1+3\sqrt{x}}$, cioè $[0,+\infty)$. Procediamo al calcolo per sostituzione: $t=\sqrt{x}$, $t^2=x$, $2t\,dt=dx$:

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+3\sqrt{x}} = \int \frac{t\cdot 2t\,dt}{1+3t}$$

: la funzione razionale fratta da integrare ha numeratore $2t^2$ di grado maggiore del denominatore. Quindi si deve ricondurre il numeratore alla forma $2t^2=(1+3t)q(t)+r(t)$ con $r(t)$ NUMERO REALE

$$\begin{array}{r|l} 2t^2 & 3t+1 \\ \hline -2t^2-\frac{2}{3}t & \frac{2}{3}t-\frac{2}{9} \leftarrow q(t) \\ \hline -\frac{2}{3}t & \\ \frac{2}{3}t+\frac{2}{9} & \\ \hline +\frac{2}{9} \leftarrow r(t) & \end{array}$$

$$= \int\left(\frac{2}{3}t-\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{1+3t}\right)dt =$$

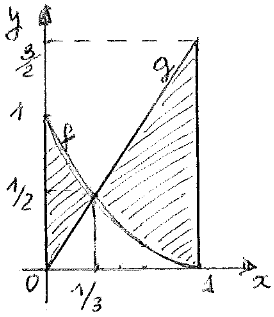
$$= \frac{1}{3}t^2-\frac{2}{9}t+\frac{2}{27}\ln|1+3t|+c =$$

$$= \frac{1}{3}x-\frac{2}{9}\sqrt{x}+\frac{2}{27}\ln(1+3\sqrt{x})+c$$

Lo stesso risultato si poteva ottenere anche usando un po' di fantasia:

$$\frac{2t^2}{3t+1} = \frac{2}{9}\cdot\frac{9t^2}{3t+1} = \frac{2}{9}\cdot\frac{(9t^2-1)+1}{3t+1} = \frac{2}{9}(3t-1)+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3t+1} \quad \text{ecc.}$$

3. La funzione $g(x)=\frac{3}{2}x$ ha per grafico una retta passante per l'origine, di coefficiente angolare $3/2$: in particolare quindi è una funzione crescente su tutto $\mathbb{R}$. La stessa cosa è vera quando la si restringe al dominio $I=[0,1]$, anche se ovviamente il grafico risulta un segmento. Si noti che $g(0)=0$ e $g(1)=3/2$.



La funzione $f(x)=1-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ ha grafico che è il traslato di 1 in direzione e verso dell'asse y del grafico simmetrico rispetto all'asse x della dilatata di un fattore $\frac{2}{\pi}$ lungo l'asse x della sinusoide. In particolare, dato che $\sin\left(\frac{\pi\cdot 0}{2}\right)=0$ e $\sin\left(\frac{\pi\cdot 1}{2}\right)=1$ si ha $f(0)=1$ e $f(1)=0$, inoltre la funzione è decrescente su I e si ha $f\left(\frac{1}{3}\right)=1-\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$
$\left[f\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\ f\left(\frac{2}{3}\right)=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Poiché anche $g(1/3)=\frac{1}{2}$ si vede che i due grafici si intersecano in $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ e in nessun altro punto poiché sono entrambe monotone ma g crescente, f decrescente. Dunque l'area della regione R delimitata dai due grafici e dalle rette $x=0$, $x=1$ (tratteggiata in figura) si esprime come:

$$\mathcal{A}=\int_0^{1/3}(f(x)-g(x))\,dx+\int_{1/3}^{1}(g(x)-f(x))\,dx.$$

Ora $\int\left(1-\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{3}{2}x\right)dx = x+\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}-\frac{3}{4}x^2+c$

e quindi

$$a = \left[x + \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{3}{4}x^2\right]_0^{1/3} + \left[\frac{3}{4}x^2 - x - \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\right]_{1/3}^{1} = \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{12}\right) - \frac{2}{\pi}\right] + \frac{3}{4} - 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - 1 - \frac{1}{6}\right) + \frac{2}{\pi}\left(\sqrt{3} - 1\right) = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi}\left(\sqrt{3} - 1\right).$$

4. $\lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(1+3t)}{5t\sqrt{1+t}} \underset{\boxed{\text{per } t\to 0^+ \ \ln(1+3t)\sim 3t}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{3t}{5t\sqrt{1+t}} = \frac{3}{5}$. Quindi la funzione non è definita nell'origine ma avendo limite finito per $t\to 0^+$ ed essendo continua in $(0,+\infty)$ risulta limitata in ogni intervallo della forma $(0,b]$. Quindi $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ non è improprio di 2° specie (semmai si dovrà parlare di integrale generalizzato: e l'integrale $\int_0^1 f(t)\,dt$ definito completando la def. in $t=0$ ponendo $f(0)=3/5$ è un numero).

Quindi per vedere se $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, scrivo

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \underbrace{\int_0^1 f(t)\,dt}_{\substack{\text{generalizzato}\\ \text{NUMERO}}} + \int_1^{+\infty} f(t)\,dt$$

e vedo se l'integrale di prima specie $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Ora per $t\to+\infty$ $\frac{\ln(1+3t)}{5t\sqrt{1+t}} \sim \frac{\ln 3t}{5t\sqrt{t}} \sim \frac{\ln t}{5t^{3/2}}$: basta vedere se questa funzione ha integrale improprio convergente, cioè se lo ha $\frac{\ln t}{t^{3/2}}$.

Anche in questo caso si può procedere per confronto: dato che $\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{-3/2}\ln t}{t^{\alpha}} = \lim_{t\to+\infty} t^{\alpha-3/2}\ln t = 0 \quad \forall \alpha < 3/2$ e che se $\alpha > 1$ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}}\,dt$ converge basta confrontare $\frac{\ln t}{t^{3/2}}$ con $\frac{1}{t^{5/4}}$ (ad es.) per concludere che $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{3/2}}\,dt$ converge e quindi converge $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{5t^{3/2}}\,dt$ e per il criterio del confronto asintotico converge anche $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$.

Oppure si può calcolare materialmente $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{3/2}}\,dt$.

Cominciamo dal calcolo della primitiva:

$$\int (\ln t)\, t^{-3/2}\,dt \underset{pp}{=} -2(\ln t)\,t^{-1/2} + 2\int t^{-3/2}\,dt = -2(\ln t)\,t^{-1/2} - 4t^{-1/2} + c$$

Quindi la funzione integrale è:

$$F(x) = \int_1^x (\ln t)\,t^{-3/2}\,dt = -2x^{-1/2}\left(\ln x + 2\right) + 4$$

e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 4$ poiché $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{1/2}} = 0$.

5. $f(x,y) = x^2y - y^4 - 2x^2 - 4y$ è definita, continua, con derivate parziali prime e seconde continue su $\mathbb{R}^2$. Quindi si può usare la consueta teoria di ottimizzazione.

I punti critici sono quelli in cui si annulla il gradiente di f: (f_x, f_y).

$f_x = 2xy - 4x = 2x(y-2)$

$f_y = x^2 - 4y^3 - 4$

Il sistema $\begin{cases} x(y-2)=0 \\ x^2-4y^3-4=0 \end{cases}$ si spezza nei due sottosistemi

$\begin{cases} x=0 \\ 4y^3=-4 \end{cases}$ e $\begin{cases} y=2 \\ x^2-36=0 \end{cases}$ che portano rispettivamente ai punti

critici $A=(0,-1)$ e $B_1=(6,2)$, $B_2=(-6,2)$.

Possiamo studiarli attraverso l'hessiano di f:

$$H(f) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y-4 & 2x \\ 2x & -12y^2 \end{vmatrix}$$

In A: $H(f)(A) = \begin{vmatrix} -2-4 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} > 0$ e visto che $f_{yy} = -12 < 0$ A è un massimo locale forte.

In B_1 e B_2 si ha $H(f)(B_i) = \begin{vmatrix} 2\cdot2-4 & (-1)^{i+1}6 \\ (-1)^{i+1}6 & -12\cdot4 \end{vmatrix} = -6^2 < 0$: quindi tanto B_1 che B_2 sono punti di sella.

6. L'equazione $y''-7y'+12y = 2e^{3t}$ è differenziale del 2° ordine, lineare, non omogenea, a coefficienti costanti.

Risolviamo l'omogenea associata $z''-7z'+12z=0$ passando all'eq. caratteristica: $r^2-7r+12=0$ che ha soluzioni $r=3$ e $r=4$.

Quindi l'eq. diff. lin. omogenea associata ha soluzioni
$$z(t) = \lambda e^{3t} + \mu e^{4t}$$
al variare di λ e μ in $\mathbb{R}$.

Cerchiamo una possibile soluzione dell'equazione completa tra le funzioni che riportino un fattore e^{3t} (ATTENZIONE: non basta ke^{3t} con $k\in\mathbb{R}$ poiché questa è una soluzione dell'omogenea e quindi NON PUÒ ESSERE SOL. DELLA COMPLETA).

Considero $\bar{y}(t) = kte^{3t}$, $k\in\mathbb{R}$.

Si ha $\bar{y}'(t) = k(3t+1)e^{3t}$ e $\bar{y}''(t) = k(9t+6)e^{3t}$

Perché $\bar{y}(t)$ sia soluzione deve essere vero che
$$k(9t+6)e^{3t} - 7k(3t+1)e^{3t} + 12kte^{3t} = 2e^{3t}$$
cioè, essendo $e^{3t}\neq 0$ $\forall t\in\mathbb{R}$,
$$k[(9-21+12)t+6-7] = 2 \quad \text{cioè } k=-2.$$

Dunque la soluzione particolare ha la forma $\bar{y}(t) = -2te^{+3t}$ e l'integrale generale è $y(t) = \bar{y}(t) + z(t)$ cioè $y(t) = -2te^{+3t} + \lambda e^{3t} + \mu e^{4t}$.

Perché valgano le condizioni iniziali $y(0)=1$, $y'(0)=0$, tenuto conto che $y'(t) = -2(3t+1)e^{3t} + 3\lambda e^{3t} + 4\mu e^{4t}$, deve essere soddisfatto il sistema lineare

$$\begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ 0 = -2 + 3\lambda + 4\mu \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 3 + \mu = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = -1 \end{cases}$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(t) = -2te^{3t} + 2e^{3t} - e^{4t}.$$

7) Se la retta passa per il punto $A = (1,0,0)$ deve avere equazioni parametriche della forma $\begin{cases} x = 1 + at \\ y = bt \\ z = ct \end{cases}$

Il vettore direzione (a,b,c) viene determinato dalle restanti condizioni: la retta cercata è parallela al piano di eq. $x+y-z=0$, che ha vettore direzione $(1,1,-1)$ ortogonale al piano e quindi alla retta ad esso parallela, ed è perpendicolare alla retta di equazioni $\begin{cases} x+2y=0 \\ x-3z=0 \end{cases}$ che ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = s \\ y = -\frac{1}{2}s \\ z = \frac{1}{3}s \end{cases}$ e quindi vettore direzione $(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ o, moltiplicandolo per 6 e mantenendo quindi inalterata la direzione, $(6,-3,2)$.

Un vettore (a,b,c) ortogonale a $(1,1,-1)$ e a $(6,-3,2)$ è ad es.

$$(1,1,-1) \wedge (6,-3,2) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -\underline{i} - 8\underline{j} - 9\underline{k} = (-1,-8,-9)$$

e quindi la retta cercata può essere scritta nella forma $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 8t \\ z = 9t \end{cases}$

(ma anche, ad es. $\begin{cases} x = -2s \\ y = -8-16s \\ z = -9-18s \end{cases}$: per questo nel testo si dice di trovare UN sistema di equazioni parametriche che rappresenti la retta in questione)

Si noti per finire che non è necessario utilizzare il prodotto vettoriale; basta esprimere l'ortogonalità di (a,b,c) ai due vettori mediante l'annullamento del prodotto scalare: $\begin{cases} (1,1,-1)\cdot(a,b,c) = 0 \\ (6,-3,2)\cdot(a,b,c) = 0 \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} a+b-c=0 \\ 6a-3b+2c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = a+b \\ 8a-b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 9a \\ b = 8a \end{cases}$$ che porta al risultato precedente per $a=-1$.

8) Il numero complesso di modulo 3 e argomento principale $\frac{\pi}{3}$ è

$z = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$.

Si vuol sapere il reciproco del suo quadrato. Senza fare troppi conti osserviamo che $z^2 = 3^2\left(\cos\left(2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + i \sin\left(2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)$, cioè ha modulo che è il quadrato del modulo di z e argomento che ne è il doppio; il reciproco di z^2 ha modulo che è il reciproco di $|z^2|$ e argomento che è l'opposto di quello di z^2. Quindi

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{9}\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{18} - i\frac{1}{6\sqrt{3}}.$$