Istituzioni di Matematica per Chimica (F5X - F45)

Svolgimento della prova del 18/9/2013

1.a) La funzione $f(x) = \ln(1+2\sqrt{x}) - x$ è definita purché l'argomento della radice sia non negativo $(x \geq 0)$ e quello del logaritmo sia positivo: essendo quest'ultimo la somma di 1 e della quantità ≥ 0 $2\sqrt{x}$, la seconda condizione è certamente soddisfatta. Quindi

I.D.: $[0, +\infty)$.

La funzione è continua nel suo I.D. (composta di funz. continue) e quindi $\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$.

Invece $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -x\left(1 - \frac{\ln(1+2\sqrt{x})}{x}\right) = -\infty$ in quanto per confronto di infiniti tra x e $\ln(1+2\sqrt{x}) \sim \ln 2 + \frac{1}{2}\ln x$, per $x \to +\infty$, si vede che la frazione tende a zero.

<u>Attenzione</u>: <u>non c'è asintoto obliquo</u> per $x \to +\infty$, poiché è vero che $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ ma $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (-x) = +\infty$!

b) $f'(x) = \dfrac{1}{1+2\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1$ (definita in $(0, +\infty) \Rightarrow$ in $x=0$ la tangente è "verticale")

$= \dfrac{1 - \sqrt{x} - 2x}{\sqrt{x}(1+2\sqrt{x})} \geq 0 \iff \begin{cases} 2x + \sqrt{x} - 1 \leq 0 \\ x > 0 \end{cases}$

L'equazione $2x + \sqrt{x} - 1 = 0$ può essere risolta per sostituzione: $t = \sqrt{x}$ con la condizione $t \geq 0$: $2t^2 + t - 1 = 0 \iff t = \genfrac{}{}{0pt}{}{-1 \leftarrow \text{NON ACCETTABILE}}{1/2}$

Quindi $\begin{cases} 2x + \sqrt{x} - 1 \leq 0 \\ x > 0 \end{cases} \iff 0 < \sqrt{x} \leq \frac{1}{2} \iff 0 < x \leq \frac{1}{4}$.

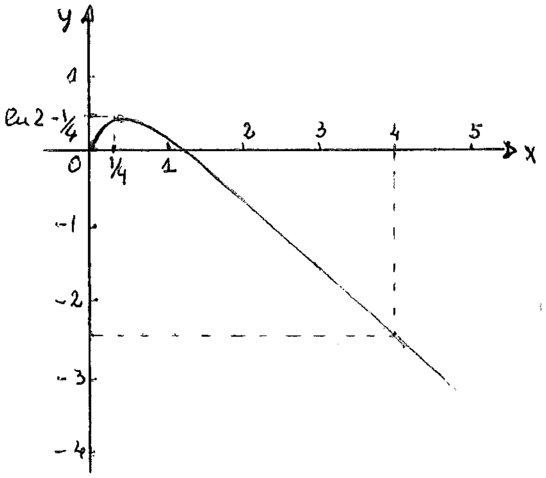
Ne consegue che $f(x)$ cresce nell'intervallo $(0, \frac{1}{4})$, decresce nell'intervallo $(1/4, +\infty)$ e ha un <u>max</u> (relativo e assoluto) in $x = 1/4$. Risulta $f(\frac{1}{4}) = \ln 2 - \frac{1}{4}$

c) $f(4) = (\ln 5) - 4$; $f'(4) = \frac{1}{10} - 1 = -\frac{9}{10}$. Quindi l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(4, (\ln 5) - 4)$ è $y = \ln 5 - 4 - \frac{9}{10}(x-4)$.

d) $f''(x) = \dfrac{-\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\right)}{(\sqrt{x} + 2x)^2} < 0$ per ogni valore di $x \in (0, +\infty)$.

Quindi la funzione è concava in tutto l'I.D.

Prima di tracciare il grafico osserviamo che $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$ e quindi la retta tangente al grafico in $(0,0)$ è l'asse y.



Poiché $f(1/4)=\ln 2-\frac{1}{4}>0$ mentre $f(4)=\ln 5-4<0$, deve sicuramente esistere uno zero nell'intervallo $[1/4, 4]$, essendo f continua e valendo il teorema degli zeri. Insieme a $x=0$, questo è l'unico altro zero della funzione, poiché essa è strettamente monotona (e quindi invertibile) in ciascuno dei due intervalli $(0, 1/4)$ e $(1/4, +\infty)$.

Tale zero può essere localizzato meglio osservando che $f(1)=\ln 3-1>0$ mentre $f(2)=\ln(1+2\sqrt{2})-2<0$ in quanto $1+2\sqrt{2}<e^2$.

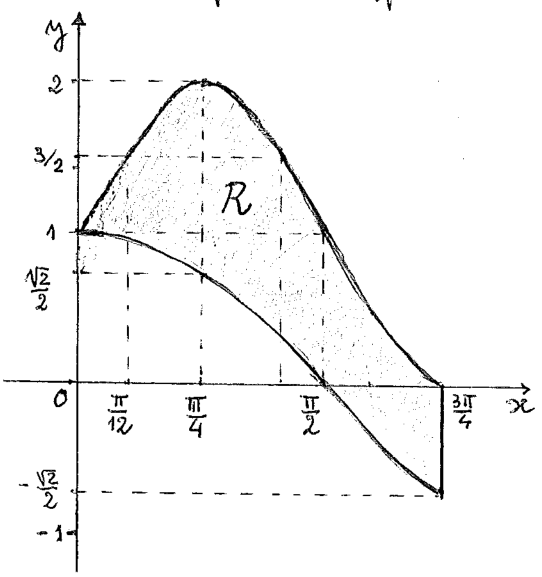
2) $\frac{e^x}{1-e^x}$ è una funzione definita e continua in ciascuno dei due intervalli $(-\infty,0)$ e $(0,+\infty)$ in cui non si annulla il denominatore. Ciascuno di essi è un intervallo massimale su cui può essere definita una primitiva della funzione; non esistono altri intervalli massimali di definizione di primitive della funzione.

Per integrare si può usare il metodo di sostituzione (immediata!):

$e^x=t$, $e^x dx = dt$ $\Rightarrow$ $\int \frac{e^x dx}{1-e^x} = \int \frac{dt}{1-t} = -\ln|1-t|+c = -\ln|1-e^x|+c$ con $c\in\mathbb{R}$.

Le primitive della forma $-\ln(e^x-1)+c$ hanno interv. max. di def. $(0,+\infty)$;
" " " $-\ln(1-e^x)+c$ " " " " " $(-\infty,0)$.

3) La funzione $f(x)=1+\sin 2x$ ha per grafico traslato di 1 (in direzione e verso dell'asse y) della funzione $\sin 2x$, che a sua volta ha grafico contratto di un fattore 2 lungo l'asse x rispetto a quello di $\sin x$. Ne segue che $0\le f(x)\le 2$, che $f(x)$ è crescente in $[0,\frac{\pi}{4})$ e decrescente in $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$, vale 1 in $x=0$ e 0 in $x=\frac{3\pi}{4}$ e nell'intervallo $[0,\frac{\pi}{2}]$ è sempre ≥ 1.



Invece $g(x)=\cos x$ ha per grafico una cosinusoide, sempre decrescente in $[0,\frac{3\pi}{4}]$; in $[0,\frac{\pi}{2}]$ si ha $0\le g(x)\le 1$ e il valore 1 è assunto solo in $x=0$; in $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$ invece $g(x)<0$ e $f(\frac{3\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Si vede quindi che per ogni $x\in[0,\frac{3\pi}{4}]$ risulta $f(x)\ge g(x)$ e l'uguaglianza è realizzata solo per $x=0$: $g(x)=f(x)=1$.

Quindi l'area della regione R del piano delimitata dai due grafici e dalle rette $x=0$ e $x=\frac{3\pi}{4}$ è data da

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} (f(x)-g(x))\,dx = \left[x-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x\right]_0^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{3\pi}{4}-0-\frac{\sqrt{2}}{2}-0+\frac{1}{2}+0 = \frac{3\pi+2-2\sqrt{2}}{4}.$$

4. $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{(1+t)^{2/3}-1}{t(t+2)} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{(1+t)^{2/3}-1}{t} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$ (LIMITE NOTEVOLE!)

Quindi è vero che $f(t)=\dfrac{(1+t)^{2/3}-1}{t(t+2)}$ non è definita nell'origine, ma è limitata: quindi l'integrale generalizzato non è improprio di 2ª specie (basta completare la def. della funzione in $t=0$ scrivendo $f(0)=\frac{1}{3}$ per avere una funzione continua da destra in $t=0$).
Per stabilire se converge $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ basta allora vedere se converge l'integrale improprio di 1ª specie $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$, dato che $\int_0^1 f(t)\,dt$ è certamente finito.
Ora per $t\to+\infty$ $f(t)\sim\dfrac{t^{2/3}}{t^2}=\dfrac{1}{t^{4/3}}$ e dato che $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{4/3}}=\lim_{x\to+\infty}3\left[\frac{-1}{t^{1/3}}\right]_1^x=3$

converge, per il criterio del confronto asintotico anche $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

5. $f(x,y)=x^5+\sqrt[4]{5}\,xy^2+y^2-5x$ è un polinomio in due variabili e quindi continuo e derivabile con continuità "tutte le volte che serve": cioè si può applicare la teoria dell'ottimizzazione in 2 variabili.

In particolare i punti critici sono quelli in cui si annulla il gradiente

$$\operatorname{grad} f=(f_x,f_y)=\left(5x^4+\sqrt[4]{5}\,y^2-5,\ 2\sqrt[4]{5}\,xy+2y\right)$$

$$\begin{cases} y(\sqrt[4]{5}\,x+1)=0\\ 5x^4+\sqrt[4]{5}\,y^2=5\end{cases} \iff \begin{cases} y=0\\ x^4=1\end{cases} \iff \begin{cases} y=0\\ x=\pm1\end{cases} \quad : 2 \text{ punti critici } (\pm1,0)$$

$$\begin{cases} x=-1/\sqrt[4]{5}\\ y^2=4/\sqrt[4]{5}\end{cases} \iff \begin{cases} x=-1/\sqrt[4]{5}\\ y=\pm2/\sqrt[8]{5}\end{cases} \quad : 2 \text{ punti critici: } \left(-1/\sqrt[4]{5},\ \pm2/\sqrt[8]{5}\right)$$

L'Hessiano di f

$$H_f=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 20x^3 & 2\sqrt[4]{5}\,y\\ 2\sqrt[4]{5}\,y & 2\sqrt[4]{5}\,x+2\end{vmatrix}$$

è certamente >0 in $(\pm1,0)$ poiché $H_f(\pm1,0)=20(\pm1)\cdot2(1\pm\sqrt{5})$ e i segni dei 2 fattori sono concordi;
in $(1,0)$ c'è un minimo locale poiché $f_{xx}=20>0$
in $(-1,0)$ " " massimo locale poiché $f_{xx}=-20<0$
Invece negli altri due punti $f_{yy}=0$ e quindi $H_f=-(f_{xy})^2<0$: dunque si tratta di due punti di sella.

6. L'equazione differenziale $y'' - 16y = 56e^{4t}$ è lineare del 2° ordine complet.
L'omogenea associata ha come equazione caratteristica $r^2 - 16 = 0$ che ha radici $r = \pm 4$ e quindi $z'' - 16z = 0$ ha soluzioni del tipo

$$z(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-4t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Quindi non posso cercare una soluzione particolare dell'eq. assegnata tra quelle della forma ke^{4t} (queste sono soluzioni dell'omogenea associata!) ma posso cercarla tra quelle del tipo $\bar{y}(t) = kte^{4t}$, con $k \in \mathbb{R}$.
Notiamo che $\bar{y}'(t) = ke^{4t}(1+4t)$ e $\bar{y}''(t) = ke^{4t}(4+4+16t)$.
Sostituendo nell'eq. differenziale lin. completa assegnata si ottiene:

$$ke^{4t}(8+16t) - 16kte^{4t} = 56e^{4t}$$

da cui, semplificando, $8k = 56$ cioè $k = 7$.
Quindi l'integrale generale dell'eq. diff. lineare completa assegnata è

$$y(t) = 7te^{4t} + c_1 e^{4t} + c_2 e^{-4t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Notiamo che $y'(t) = 7e^{4t}(1+4t) + 4c_1 e^{4t} - 4c_2 e^{-4t}$
e quindi $y(0) = c_1 + c_2$, $y'(0) = 7 + 4c_1 - 4c_2$
Perché valga la condizione di Cauchy $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$ deve essere $\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 4c_1 - 4c_2 = -8 \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} c_2 = -c_1 \\ c_1 = -1 \end{cases}$. Dunque la soluzione del problema di Cauchy è la funzione

$$y(t) = 7te^{4t} - e^{4t} + e^{-4t}.$$

7. Il sistema $\begin{cases} (2k-1)x - ky + 2z = 3 \\ (k-1)x + y + kw = 1 \\ x + ky + 2z + 2w = 5 \end{cases}$ è risolubile se e solo se
il rango della matrice dei coefficienti $A = \begin{pmatrix} 2k-1 & -k & 2 & 0 \\ k-1 & 1 & 0 & +k \\ 1 & k & 2 & 2 \end{pmatrix}$
coincide con quello della matrice A orlata con la colonna dei termini noti: $\left(\begin{array}{cccc|c} 2k-1 & -k & 2 & 0 & 3 \\ k-1 & 1 & 0 & +k & 1 \\ 1 & k & 2 & 2 & 5 \end{array}\right) = (A|\underline{b})$
per il Teorema di Rouché-Capelli.
Ora è facile vedere (per ogni $k \in \mathbb{R}$) che $rg A \geq 2$ poiché contiene la sottomatrice quadrata d'ordine 2: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 2 \end{pmatrix}$ che ha determinante $2 \neq 0$.

Orlando questa matrice con l'ultima colonna e 1ª riga di A si ha una matrice il cui determinante

$$\begin{vmatrix} -k & 2 & 0 \\ 1 & 0 & +k \\ k & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -k & 1 & 0 \\ 1 & 0 & +k \\ k & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2k & 0 & -2 \\ 1 & 0 & +k \\ k & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & +k \end{vmatrix} = 4(k^2-1)$$ si annulla

solo per $k = \pm 1$. Quindi se $k \neq \pm 1$ sicuramente $rg A = 3 = rg(A|b)$ (entrambe hanno solo 3 righe e quindi il rango non può essere maggiore) e di conseguenza il sistema è risolubile e dipende da 1 parametro reale t (in questo ci sono 4 incognite con 3 soli legami, indicati dal rango)

$\boxed{\text{Se } k=1}$

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

è evidente che $rg A = 2$ (la 1ª colonna è multipla della 3ª e quindi anche la matrice formata dalle prime 3 colonne ha $\det = 0$)

ma anche $(A|\underline{b})$ ha rango 2. Lo si può vedere calcolando l'ultimo determinante di matrice 3×3 che è possibile estrarre da $(A|\underline{b})$ orlando $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -2(5-1-1-3) = 0$$

o più semplicemente risolvendo:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ y + w = 1 \\ x + y + 2z + 2w = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ y + w = 1 \\ 2y + 2w = 2 \end{cases}$$

sono la stessa equazione

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + y - 2z \\ w = 1 - y \end{cases}$$

: e di qui si vede anche che le soluzioni dipendono da 2 parametri:

$$\begin{cases} y = s \\ z = t \\ x = 3 + s - 2t \\ w = 1 - s \end{cases}$$

Invece se $\boxed{k=-1}$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

ha rango 3 mentre A ha rango 2. Anche in questo caso è più comodo stabilirlo risolvendo il sistema, magari usando il metodo di riduzione di Gauss-Jordan che mette subito in evidenza le righe che dipendono da altre:

$$(A|\underline{b}) \xmapsto{\text{scambio di righe}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\substack{\text{sommo 3 volte la 1ª alla 2ª} \\ \text{e 2 volte la 1ª alla 3ª}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 8 & 6 & 18 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & 11 \end{array}\right) \mapsto$$

$$\xmapsto{\text{scambio di righe}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & 11 \\ 0 & -2 & 8 & 6 & 18 \end{array}\right) \xmapsto{\text{sottraggo 2 volte la 2ª dalla 3ª}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

L'ultima riga può essere letta o dicendo che l'ultima equazione $0x+0y+0z+0w=4$ è impossibile e quindi è impossibile il sistema oppure osservando che la riga di zeri ottenuta dall'elaborazione di A dice che una riga di A dipende delle altre $\Rightarrow rg A = 2$, mentre l'ultima riga di $(A|b)$ è indipendente dalle altre – grazie all'elemento non nullo in posizione $(3,5)$ – e quindi $rg(A|b) = 3$

8. Se $w = 1-2i$ è una radice sesta di z, tutte le altre radici seste di z si ottengono moltiplicando w per le radici seste di 1: questo infatti porta a disegnare nel piano di Argand Gauss 6 punti vertici di un esagono regolare centrato nell'origine, ciascuno con lo stesso modulo di w. Ora le radici 6^e dell'unità sono

$$z_k = \cos\frac{k\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{k\pi}{3} \quad \text{con } k = 0,1,2,3,4,5 \Rightarrow z_0 = 1 = -z_3;\ z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -z_4,\ z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -z_5$$

da cui $w_0 = 1-2i$, $w_3 = -1+2i$; $w_1 = (1-2i)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{3} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)$, $w_4 = -\frac{1}{2} - \sqrt{3} + i\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

$w_2 = (1-2i)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \sqrt{3} + i\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $w_5 = \frac{1}{2} - \sqrt{3} + i\left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.