Istituzioni di Matematica/ Matematiche F45 e F5X (22/1/2014)

1) La funzione $f(x) = 7 + \frac{1}{2}x - \frac{8}{\sqrt{1-x}}$

a) è definita in $(-\infty, 1)$, poiché basta che la radice sia definita $(1-x \geq 0)$ e non nulla $(x \neq 1)$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 7 - \infty + 0^- = -\infty$

Esiste asintoto obliquo: $y = 7 + \frac{1}{2}x$, poiché $\lim_{x\to-\infty} f(x) - (7 + \frac{1}{2}x) = 0$

[oppure con la solita routine: $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{7}{x} + \frac{1}{2} - \frac{8}{x\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2}$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = 7$].

$\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$: c'è un asintoto verticale di equazione $x = 1$

b) $f(0) = 7 - 8 = -1$

$f'(x) = \frac{1}{2} - 8\left[(1-x)^{-1/2}\right]' = \frac{1}{2} - 8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1)(1-x)^{-3/2} = \frac{1}{2} - 4(1-x)^{-3/2}$

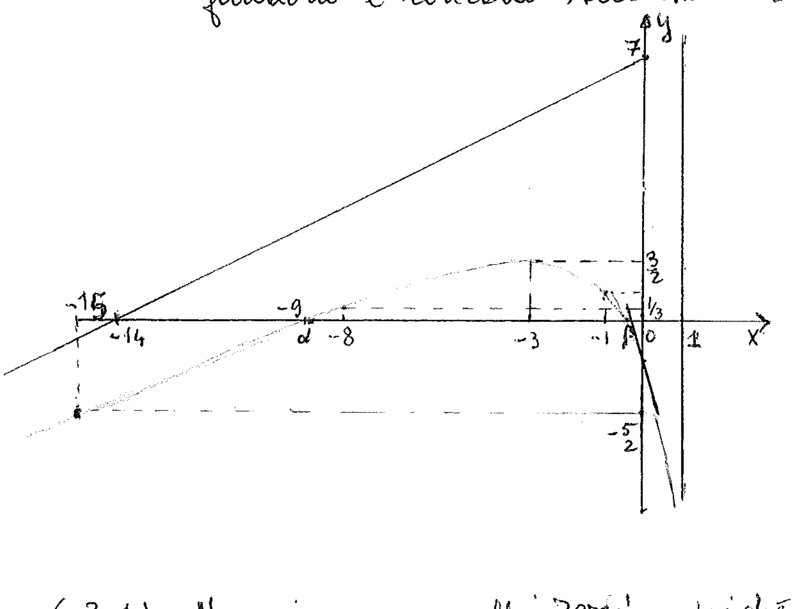
Quindi $f'(0) = \frac{1}{2} - 4 = -\frac{7}{2}$

Dunque l'equazione della retta tangente al grafico in $(0,-1)$ è $y + 1 = -\frac{7}{2}x$.

c) $f'(x) = \frac{1}{2} - 4(1-x)^{-3/2} \geq 0 \iff (1-x)^{-3/2} \leq \frac{1}{8} \iff (1-x)^{3/2} \geq 8 \iff 1 - x \geq 8^{2/3} = 4 \iff$
$\iff x \leq -3$

Quindi f è crescente in $(-\infty, -3)$, decrescente in $(-3, 1)$ e ha un punto di massimo (relativo e assoluto) in $x = -3$ con $f(-3) = 7 - \frac{3}{2} - 4 = \frac{3}{2}$, valore massimo assunto dalla funzione.

d) $f''(x) = -4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)(-1)(1-x)^{-5/2} = -6(1-x)^{-5/2} < 0 \quad \forall x \in (-\infty, 1)$: quindi la funzione è concava sul suo I.D.



Dato che la funzione è continua su tutto il suo I.D. si può applicare a ciascun suo sottointervallo chiuso il teorema degli zeri. In particolare Dato che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ esiste un $\bar{x}$ tale che $f(\bar{x}) < 0$: ad es. $f(-15) = 7 - \frac{15}{2} - 2 = -5/2$ e quindi uno zero α sarà contenuto in $(-15, -3)$ visto che $f(-3) > 0$. Similmente, visto che $f(0) = -1 < 0$ ci sarà uno zero β nell'intervallo $(-3, 1)$. Non ci saranno altri zeri: poiché nei due intervalli $(-\infty, -3)$ e $(-3, 1)$ la funzione è monotona e quindi in particolare INIETTIVA. Se si vogliono localizzare meglio i 2 zeri si osservi che $f(-9) = \frac{5}{2} - \frac{8}{\sqrt{10}} < 0$ (poiché $250 < 16^2$) mentre $f(-8{,}9) = 2{,}55 - \frac{8}{\sqrt{9{,}9}} > 0$. Quindi $\alpha \in (-9, -8{,}9)$. Ancora: $f(-1) = \frac{13}{2} - 4\sqrt{2} > 0{,}8$, di più: $f(-0{,}44) = 7 - 0{,}22 - \frac{80}{12} = \frac{1}{3} - 0{,}22 > 0 \Rightarrow \beta \in (-0{,}44, 0)$

2. La funzione $(1+(\tan 2x)^2)\sqrt{\tan 2x}$ è definita purché sia $\begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \\ \tan 2x \geq 0 \end{cases}$

cioè per $k\pi \leq 2x < \frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, cioè per $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2})$

essa è anche continua in ciascuno degli intervalli $(k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2})$, $k\in\mathbb{Z}$ e su ciascuno di essi sarà definita una collezione di primitive. Visto che quella cercata deve prendere valore in $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3} \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$, l'intervallo di definizione della primitiva è $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$

Per calcolarla procediamo per sostituzione: $\tan 2x = t \Rightarrow 2(1+\tan^2 2x)\,dx = dt$

Quindi

$$\int (1+(\tan 2x)^2)\sqrt{\tan 2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{t^3} + c = \frac{1}{3}\sqrt{(\tan 2x)^3} + c.$$

Di questa primitiva si deve scegliere quella tale che $\frac{1}{3}\sqrt{(\tan\frac{4\pi}{3})^3} + c = 0$

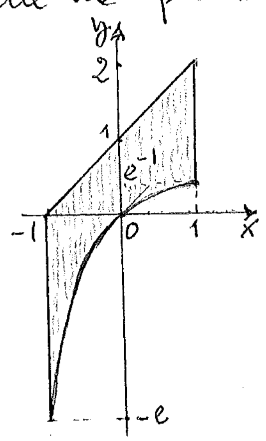
cioè $\frac{1}{3}\sqrt{3\sqrt{3}} + c = 0$, cioè $c = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

Quindi la primitiva cercata è la funzione definita in $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ dalla legge $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{(\tan 2x)^3} - \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

3. La funzione definita su $[-1,1]$ da $g(x) = 1+x$ è monotona crescente; ha per grafico un segmento parallelo alla bisettrice del 1°-3° quadrante e valore minimo $g(-1)=0$ e valore massimo $g(1)=2$.

La funzione definita su $[-1,1]$ da $f(x) = xe^{-x}$ è pure monotona crescente poiché $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x) \geq 0$ in tutto l'intervallo $[-1,1]$. Inoltre $f(-1) = -e$, $f(1) = e^{-1}$ e $f(x)>0$ in $(0,1]$, $f(x)<0$ in $[-1,0)$ e $f(0)=0$.

Inoltre $f''(x) = e^{-x}(-2+x) < 0$ $\forall x\in[-1,1]$: quindi la funzione è concava e quindi il grafico giace tutto al di sotto della retta tangente nell'origine che ha equazione $y=x$. Ne segue che $f(x)<g(x)$ $\forall x\in[-1,1]$.



Quindi la regione R delimitata dai due grafici e dalle rette di equazione $x=-1$ e $x=1$ è quella tratteggiata in figura e la sua area è

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{1} (g(x)-f(x))\,dx = \int_{-1}^{1} (1+x-xe^{-x})\,dx$$

Ora $\int -xe^{-x}dx$ = (per parti con fattor differenziale $-e^{-x}dx$) =

$$= xe^{-x} - \int e^{-x}dx = (x+1)e^{-x} + c \qquad c\in\mathbb{R}$$

e quindi

$$\mathcal{A} = \left[x + \frac{x^2}{2} + (x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{1} = 1+\frac{1}{2}+2e^{-1} - (-1+\frac{1}{2}+0) = 2(1+e^{-1}).$$

4. La funzione $f(t) = \frac{\ln t}{t\sqrt{t+1}}$ è definita in $(0,+\infty)$: infatti il logaritmo deve avere argomento positivo e questo fa sì che il denominatore non si annulli (anzi sia sempre >0) e il radicando sia >1 (e quindi la radice sia definita. La funzione è continua in $(0,+\infty)$ e in particolare in $[1,+\infty)$ e in questo intervallo è ≥ 0 (e $=0$ solo in $t=1$).

Quindi alla funzione si possono applicare i criteri di confronto per stabilire se l'integrale improprio di 1ª specie $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

In particolare, per $t \to +\infty$ $f(t) \sim \frac{\ln t}{t^{3/2}}$.

Ora $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{3/2}}\,dt = \lim_{z\to+\infty} \int_1^z \frac{\ln t}{t^{3/2}}\,dt = \lim_{z\to+\infty}\left[-2t^{-1/2}\ln t - 4t^{-1/2}\right]_1^z =$

$= \lim_{z\to+\infty}\left(4 - 2\,\frac{\ln z - 2}{z^{1/2}}\right) = 4$ per confronto di infiniti

Poiché questo integrale improprio converge, converge anche $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$, per il criterio del confronto asintotico

5. La funzione $f(x,y) = x^4 + 2xy^3 + 3y^4 - \frac{1}{2}x$ ha derivate parziali

$$f_x(x,y) = 4x^3 + 2y^3 - \frac{1}{2} \qquad f_y(x,y) = 6xy^2 + 12y^3$$

Tali derivate nell'origine valgono rispettivamente $f_x(0,0) = -\frac{1}{2}$ e $f_y(0,0) = 0$.
Poiché $f(0,0) = 0$, l'equazione del piano tangente al grafico in $P = (0,0,0)$ è

$$z - 0 = \frac{1}{2}(x-0) + 0(y-0)$$

cioè $z = -\frac{1}{2}x$.

Il punto $(0,0)$ non può essere un estremo locale poiché, essendo la funzione e le sue derivate continue (in tutto $\mathbb{R}^2$!) condizione necessaria perché un punto sia un estremante locale per la funzione è che in esso il gradiente si annulli, mentre $\operatorname{grad} f(0,0) = (-\frac{1}{2}, 0)$.

6. L'equazione differenziale $y'' + 9y = 12\sin 3t$ è lineare del 2° ordine completa, a coefficienti costanti.
La sua omogenea associata $z'' + 9z = 0$ ha come equazione caratteristica $r^2 + 9 = 0$ che ha radici immaginarie pure $r = \pm 3i$. Quindi il suo integrale generale ha la forma

$$z(t) = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t \qquad , c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(essendo nulla la parte reale: $e^{0t} = 1$)
Non si può quindi cercare una soluzione particolare dell'equazione completa tra le combinazioni lineari di $\cos 3t$ e $\sin 3t$!
Ma, posto $\bar{y}(t) = kt\cos 3t$, si ha $\bar{y}'(t) = k(\cos 3t - 3t\sin 3t)$ e
$\bar{y}''(t) = k(-3\sin 3t - 3\sin 3t - 9t\cos 3t)$.
Sostituendo nell'equazione completa:

$$k(-6\sin 3t - \cancel{9t\cos 3t}) + \cancel{9kt\cos 3t} = 12\sin 3t \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

se e solo se $-6k = 12$, cioè per $k = -2$
Quindi l'integrale generale della completa è $y(t) = -2t\cos 3t + c_1\cos 3t + c_2 \sin 3t$ ove c_1, c_2 variano in $\mathbb{R}$.

7. Il sistema lineare $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ kx + y = 3k \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$ ha matrice dei coefficienti $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$

che ha determinante $\neq 0$ se e solo se $k\cdot(1-3k) \neq 0$. Quindi se $k \neq 0, \frac{1}{3}$ si ha $rg A = 3$ e il sistema è risolubile con soluzione unica (teor. di Cramer)

Se $\boxed{k=0}$ la matrice $(A|b)$ orlata con i termini noti:

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 3 poiché $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-3 \neq 0$. Poiché $rg A = 2 < rg B = 3$ il sistema è impossibile

Se $\boxed{k = 1/3}$ la matrice $(A|b)$ orlata con i termini noti:

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & \vdots & 3 \\ 1/3 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1/3 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$ ha lo stesso rango di A (che è 2 poiché $\begin{vmatrix} 1/3 & 0 \\ 1 & 1/3 \end{vmatrix} \neq 0$) poiché la colonna dei termini noti coincide con la 2ª colonna di A e quindi orlare $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 1 & 1/3 \end{pmatrix}$ con la 2ª o la 4ª colonna produce sempre determinante nullo. Ciò in virtù del teorema di Kronecker garantisce che tutte le matrici 3×3 estraibili da $(A|b)$ hanno determinante $=0$ e quindi $rg(A|b)=2$. Dunque il sistema è risolubile e dipende da $3-2=1$ "variabile".

8. $w = -1 - i$ ha modulo $\sqrt{2}$ e argomento principale $-\frac{3\pi}{4}$, poiché il suo coseno e il suo seno valgono $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Quindi $w^{12} = (\sqrt{2})^{12}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\cdot 12\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\cdot 12\right)\right) = 2^6\left(\cos(-9\pi) + i\sin(-9\pi)\right) =$

$= 64\,(-1+0\cdot i) = -64.$