Matematica del Discreto (19/6/2014)

1) Per verificare che $p(x) = -x^3+x^2-x+1$ e $q(x) = x^3-x^2-x-2 \in \mathbb{R}[x]$ sono primi tra loro si possono usare due strade (alternative):

A) usare l'algoritmo euclideo delle divisioni successive per mostrare che $MCD(p(x), q(x)) = 1$

$$\begin{array}{r|l} -x^3+x^2-x+1 & x^3-x^2-x-2 \\ \cline{2-2} x^3-x^2-x-2 & -1 \text{ quoziente} \\ \hline \underbrace{-2x-1}_{\text{resto}} & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} x^3-x^2-x-2 & -2x-1 \\ \cline{2-2} -x^3-\frac{1}{2}x^2 & -\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{8} \\ \hline -\frac{3}{2}x^2-x-2 & \\ \frac{3}{2}x^2+\frac{3}{4}x & \\ \hline -\frac{1}{4}x-2 & \\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{8} & \\ \hline -\frac{15}{8} & \longrightarrow \text{resto} \end{array}$$

ovviamente a questo punto $-2x-1$ è divisibile per $-\frac{15}{8}$ che quindi è un M.C.D. di $p(x)$ e $q(x)$, così come tutti gli elementi non nulli di $\mathbb{R}$, in particolare: 1

B) Scomporre i due polinomi in fattori primi e mostrare che $p(x)$ e $q(x)$ non hanno fattori in comune.

$p(x) = x^2(-x+1) - x+1 = (x^2+1)(1-x)$

$q(x) = (x-2)(x^2+x+1)$ poiché $q(2) = 8-4-2-2 = 0$ e

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

I fattori di 2° grado sono irriducibili poiché $\Delta(x^2+1) = -4 < 0$ e $\Delta(x^2+x+1) = 1-4 = -3 < 0$.

Quindi $p(x)$ e $q(x)$ <u>non hanno fattori comuni</u>.

Passando agli stessi polinomi in $\mathbb{Z}_5[x]$ osserviamo che il polinomio $p(x)$ si può ancora scomporre come $(x^2+1)(1-x)$ ma in questo caso x^2+1 non è irriducibile poiché valutato in $[2]$ vale $[2]^2+[1] = [5] = [0]$, così come valutato in $[-2] = [3]$.

Quindi $p(x) = (1-x)(x-2)(x+2)$ e (anche senza aver già scomposto in precedenza $q(x)$) si verifica che $q(2) = 8-4-2-2 = 0$: quindi per il teor. di Ruffini $(x-2)$ è un fattore di $q(x)$, cioè $p(x)$ e $q(x)$ hanno almeno un fattore primo in comune.

Si vede che
$$\left.\begin{array}{l} q(-2) = -8-4+2-2 = -12 \equiv 3 \mod 5 \\ q(1) = 1-1-1-2 = -3 \equiv 2 \mod 5 \end{array}\right\} \text{i due polinomi non hanno altri fattori in comune}$$

(questa osservazione non è richiesta.)

Volendo invece risolvere il problema come in (A), osservare che in $\mathbb{Z}_5$ il primo resto diventa $3x+4$ e il divisore diventa $x^3+4x^2+4x+3 \Rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} x^3+4x^2+4x+3 & 3x+4 \\ \cline{2-2} -x^3-3x^2 & 2x^2+2x+2 \\ \hline x^2+4x+3 & \\ -x^2-3x & \\ \hline x+3 & \\ -x-3 & \\ \hline & \text{resto zero} \end{array}$$

e quindi $3x+4$ <u>è fattore comune</u> !!

2) a) La relazione $\mathcal{A}$ rappresentata da $A = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix}$ NON è riflessiva poiché l'elemento di posto $(5,5)$ è diverso da 0 cioè z non è in relazione con se stesso.

b) La relazione $\mathcal{B}$ rappresentata da $B = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$ è antisimmetrica poiché in B gli elementi non nulli che non appartengono alla diagonale sono in posizione $(2,3)$, $(3,1)$, $(4,5)$, $(5,3)$ e nelle posizioni simmetriche rispetto alla diagonale $((3,2), (1,3), (5,4), (3,5))$ compaiono zeri: cioè ad es. $w \mathcal{B} x$, ma $x \not\!\mathcal{B} w$.

c) La matrice di incidenza di $\mathcal{B}\circ\mathcal{A}$ è $AB = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\oplus1&0&0&0&0\\ 0&0&1\oplus1&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix}$ poiché in una matrice booleana $1\oplus1=1$. Visto che ogni riga contiene 1 e 1 solo elemento 1 si conclude che $\mathcal{B}\circ\mathcal{A}$ è una applicazione di X in sé (per ogni elem. di X ce n'è uno e uno solo in X con cui esso è in relazione):

$$\mathcal{B}\circ\mathcal{A} = \begin{pmatrix} v & w & x & y & z\\ v & x & v & z & v \end{pmatrix}.$$

3) $X = \{A \in M_2(\mathbb{Z}) \mid AA^T = I\}$; $f:(X,\cdot) \longrightarrow (\{1,-1\},\cdot)$ definita da $f(A) = \det A$

a) $\ker f = \{A \in X \mid \det A = 1\}$; poiché le matrici A devono essere tali che $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0\\ 0&1\end{pmatrix}$, cioè $\begin{cases} a^2+b^2=1\\ ac+bd=0\\ c^2+d^2=1\end{cases}$ e a elementi interi

può succedere solo una delle seguenti cose:

- $a=\pm1$, $b=0$ $\Rightarrow$ $ac=0$ e quindi $c=0$ $\Rightarrow$ $d^2=1$, cioè $d=\pm1$
  e corrispondentemente si hanno le matrici
  $\begin{pmatrix} 1&0\\ 0&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1&0\\ 0&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1&0\\ 0&-1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&0\\ 0&-1\end{pmatrix}$
- $a=0$, $b=\pm1$ $\Rightarrow$ $bd=0$ e quindi $d=0$ $\Rightarrow$ $c^2=1$ cioè $c=\pm1$
  e corrispondentemente si hanno le matrici
  $\begin{pmatrix} 0&1\\ 1&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0&-1\\ 1&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0&-1\\ -1&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0&1\\ -1&0\end{pmatrix}$

Cioè X è un gruppo di ordine 8 e i suoi elementi tali che $\det A = 1$ sono $\begin{pmatrix} 1&0\\ 0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1&0\\ 0&-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0&-1\\ 1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0&1\\ -1&0\end{pmatrix}$: questo è il nucleo di f che (coerentemente col fatto che f è suriettiva e che l'ordine dell'immagine è 2) ha ordine $8/2=4$.

b) L'insieme delle preimmagini di -1 è il laterale di $\ker f$ mediante uno degli elem. con $\det = -1$: $\ker f \cdot \begin{pmatrix} 1&0\\ 0&-1\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} 1&0\\ 0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1&0\\ 0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1\\ 1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&-1\\ -1&0\end{pmatrix}\right\}$.

4) L'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è rappresentata rispetto alle basi $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$ nel dominio e $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ nel codominio da

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

poiché $f(\underline{a}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(\underline{a}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\underline{a}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Per trovare la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ tanto nel dominio che nel codominio basta moltiplicare F a destra per A^{-1} ove $A = (\underline{a}_1 | \underline{a}_2 | \underline{a}_3)$. Calcolo A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \text{ ; quindi } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$FA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ è la matrice richiesta.

5) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & a & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha equazione caratteristica $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ a & a-\lambda & -a \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

cioè $(1-\lambda)\left[(1-\lambda)(a-\lambda)-a\right] = (1-\lambda)\left(\lambda^2-(1+a)\lambda\right) = 0$

e quindi ha autovalori $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = 1+a$.

Se i 3 autovalori sono distinti, cioè se $1+a \neq 0$ e $1+a \neq 1$, cioè se $a \neq 0, -1$ allora è certamente diagonalizzabile.

Se $a = 0$, $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica 1 e le soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{cioè} \begin{cases} y = 0 \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

sono i vettori della forma $\begin{pmatrix} h \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ l'autospazio ha dimensione 2 (cioè la molteplicità algebrica è uguale a quella geometrica) $\Rightarrow$ la matrice è diagonalizzabile.

Se $a = -1$, $\lambda = 0$ ha molteplicità algebrica 2 e le sol. del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{cioè} \begin{cases} x + y = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

sono i vettori della forma $\begin{pmatrix} h \\ -h \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ l'autospazio ha dimensione 1 $\Rightarrow$ la molteplicità algebrica è strettamente maggiore di quella geom $\Rightarrow$ la matrice non è diagonalizzabile.

Se $a=1$ i 3 autovalori distinti sono $\lambda=0,1,2$; corrispondentemente

$\lambda=0$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y=-x \\ z=0 \end{cases}$: autovettori $\begin{pmatrix} h \\ -h \\ 0 \end{pmatrix}$, $h \in \mathbb{R}^*$

$\lambda=1$: $\begin{pmatrix} 1-1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y=0 \\ x-z=0 \end{cases}$: autovettori $\begin{pmatrix} k \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}^*$

$\lambda=2$: $\begin{pmatrix} 1-2 & 1 & 0 \\ 1 & 1-2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x-y=0 \\ x-y-z=0 \\ z=0 \end{cases}$: autovettori $\begin{pmatrix} \ell \\ \ell \\ 0 \end{pmatrix}$, $\ell \in \mathbb{R}^*$

Quindi una base di autovettori è data da $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$