Matematica del discreto - Matematica discreta (per Informatica)

Soluzioni della prova del 18/9/2014

1. L'equazione diofantea $89x + 35y = 6$ <u>ha soluzioni</u> poiché $MCD(89,35) = 1$ e 1 divide il termine noto 6.

Per vedere che $MCD(89,35) = 1$ posso fare <u>una</u> delle seguenti 3 cose:

a) osservare che 89 è un numero primo e non divide 35

b) osservare che nessuno dei fattori primi di 35 (cioè 5 e 7) non divide 89 (per la divisibilità per 5 applicare il criterio, per la non divisibilità per 7 osservare che $89 = 7 \cdot 12 + 5$)

c) usare l'<u>algoritmo euclideo delle divisioni successive</u>

Ciò permette di trovare anche 1 soluzione dell'eq.

$$89z + 35w = 1$$

e quindi è utile per il nostro problema. Facciamolo:

$$\underline{89} = \underline{35} \cdot 2 + 19$$
$$\underline{35} = \underline{19} \cdot 1 + 16$$
$$\underline{19} = \underline{16} \cdot 1 + 3$$
$$\underline{16} = \underline{3} \cdot 5 + 1$$
$$\underline{3} = 1 \cdot 3 + 0 \quad \boxed{\text{STOP}}$$

$MCD(89,35) = 1$. Inoltre rileggendo dall'alto:

$$19 = \underline{89} - \underline{35} \cdot 2$$
$$16 = \underline{35} - \underline{19} = \underline{35} - (\underline{89} - \underline{35} \cdot 2) = \underline{35} \cdot 3 - \underline{89}$$
$$3 = \underline{19} - \underline{16} = (\underline{89} - \underline{35} \cdot 2) - (\underline{35} \cdot 3 - \underline{89}) = \underline{89} \cdot 2 - \underline{35} \cdot 5$$
$$1 = \underline{16} - \underline{3} \cdot 5 = (\underline{35} \cdot 3 - \underline{89}) - (\underline{89} \cdot 2 - \underline{35} \cdot 5) \cdot 5 = \underline{35} \cdot 28 - \underline{89} \cdot 11.$$

Cioè $\begin{cases} \bar{z} = -11 \\ \bar{w} = 28 \end{cases}$ è <u>una soluzione dell'eq.</u> $\underline{89z + 35w = 1}$

Moltiplicando $\bar{z}$ e $\bar{w}$ per 6 si ha <u>una sol.</u> <u>dell'eq.</u> $\underline{89x + 35z = 6}$:

$$\begin{cases} \bar{x} = -66 \\ \bar{y} = 168 \end{cases}$$

<u>Tutte</u> le possibili soluzioni si ottengono aggiungendo a $\bar{x}$ un multiplo intero di 35 e a $\bar{y}$ lo stesso multiplo di -89:

$$\begin{cases} x = -66 + 35t \\ y = 168 - 89t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$$

In particolare scegliendo $t = 2$ si ha $\bar{\bar{x}} = 4$, $\bar{\bar{y}} = -10$ e quindi si può dare (volendo) una rappresentazione più semplice delle soluzioni:

$$\begin{cases} x = 4 + 35k \\ y = -10 - 89k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

La soluzione $\bar{\bar{x}} = 4$, $\bar{\bar{y}} = -10$ si poteva anche individuare con qualche tentativo... ma non era l'idea soggiacente l'esercizio!

2. È noto che

a) la somma dei gradi di tutti i vertici di un grafo è il doppio del numero dei suoi lati

b) un albero è un grafo connesso con un numero di lati di uno inferiore al numero di vertici

Nel caso dell'esercizio, 7 vertici hanno grado 1
5 vertici hanno grado 2
x vertici hanno grado 3

Se il numero dei lati è y deve essere: $\begin{cases} y = (7+5+x)-1 = 11+x \\ 7\cdot 1 + 5\cdot 2 + x\cdot 3 = 2y \end{cases}$

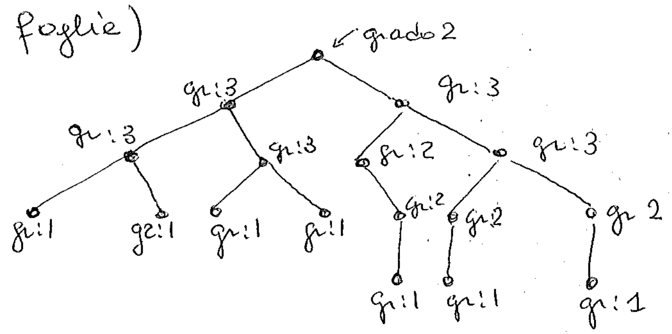
cioè, sostituendo $y = 11+x$ nella seconda equazione e sommando:

$$17 + 3x = 22 + 2x$$

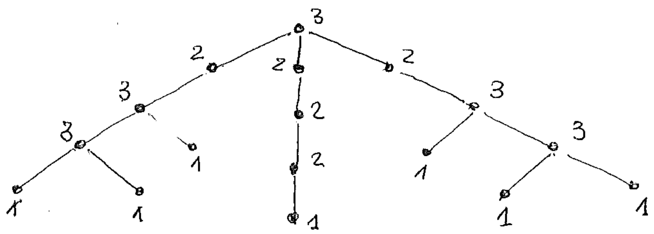
che porta: $\boxed{x = 5}$

In totale quindi l'albero A ha 17 vertici e 16 lati.

Proviamo a disegnare uno di questi alberi (osservare che ha 7 foglie)



Si può anche ottenere un albero con le caratteristiche richieste così:



ecc.

3. $X = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \right\}$.

a) per verificare che X è un sottoanello di $M_2(\mathbb{R})$ basta

i) verificare che non è vuoto: certo non lo è poiché hanno questa forma la matrice nulla ($a=b=0$) e quella identica ($a=1, b=0$). Ciò garantisce anche che i 2 elementi neutri (risp. $+$ e $\cdot$) di $M_2(\mathbb{R})$ stanno in X (SE NON SUCCEDESSE X NON sarebbe sottoanello di $M_2(\mathbb{R})$!)

ii) verificare che X è chiuso rispetto alla differenza:
$\forall\, A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$ $\in X$ si ha $A - A' = \begin{pmatrix} a-a' & b-b' \\ b-b' & a-a' \end{pmatrix}$ e quindi $A - A' \in X$

iii) verificare che X è chiuso rispetto al prodotto.
$\forall\, A, A' \in X$ si ha $A \cdot A' = \begin{pmatrix} aa'+bb' & ab'+ba' \\ ba'+ab' & bb'+aa' \end{pmatrix}$ e quindi $AA' \in X$, poiché in $\mathbb{R}$ vale la propr. commut. delle $\cdot$.

b) Per stabilire se X è commutativo confronto i due prodotti

$$A\cdot A' = \begin{pmatrix} aa'+bb' & ab'+ba' \\ ba'+ab' & bb'+aa' \end{pmatrix} \quad e \quad A'A = \begin{pmatrix} a'a+b'b & a'b+b'a \\ b'a+a'b & b'b+a'a \end{pmatrix}$$

i due elementi di posto $(1,1)$ sono uguali poiché vale la propr. comm. del prodotto in $\mathbb{R}$

i due elementi di posto $(1,2)$ sono uguali poiché valgono in $\mathbb{R}$ le due proprietà commutative del prodotto e della somma

i due elementi di posto $(2,1)$ sono uguali poiché ciascuno di essi è uguale all'elem. di posto $(1,2)$ della stessa matrice,

i due elementi di posto $(2,2)$ sono uguali poiché ciascuno di essi è uguale all'elem. di posto $(1,1)$ della stessa matrice.

$\Rightarrow AA' = A'A \quad \forall A, A' \in X$.

cioè in X vale la propr. comm. del prodotto, cioè X è un anello commutativo.

Questo anello contiene elementi non invertibili diversi dalla matrice nulla poiché $\det A = a^2 - b^2$ si può annullare; basta prendere $b = a$ oppure $b = -a$.

Cioè sono non invertibili in X tutte le matrici del tipo

$\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$ oppure $\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

c) È ovvio che le matrici invertibili NON possono essere divisori dello zero poiché se $A \circ A' = O$ e A è invertibile si ha $A^{-1} \circ (A \circ A') = A^{-1} \circ O$ cioè $(A^{-1} \cdot A) \cdot A' = O$ cioè $I \cdot A' = O$ cioè $A' = O$.

Quindi cerchiamo i divisori dello zero tra le non invertibili

Ora $\forall a, a' \in \mathbb{R}^*$ si ha

$$\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -a' \\ -a' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'-aa' & -aa'+aa' \\ aa'-aa' & -aa'+aa' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi tutte le matrici non invertibili sono divisori dello zero. (non nulle)

NOTA.

La scelta della coppia di matrici il cui prodotto dà la matrice nulla è praticamente obbligata, una volta che si osservi che le matrici non devono essere invertibili: infatti le matrici non invertibili, come trovato al punto (b) sono della forma $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ oppure $\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix}$. È chiaro che il prodotto di due matrici dello stesso tipo non può dare la matrice nulla:

$$aa'\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}aa'; \quad aa'\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}aa'$$

e quindi bisogna usare matrici di "tipo" diverso.

4. $F_a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $F_a\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+ay+4t \\ ax+4y+4at \\ x+ay+(a-2)z+4t \end{pmatrix}$

La dimensione del nucleo può essere ricavata o dal rango della matrice associata, attraverso il teorema di nullità + rango, o determinando il nucleo e studiandone la dimensione al variare di a.

I STRADA.

La matrice associata a F_a è $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 4 \\ a & 4 & 0 & 4a \\ 1 & a & a-2 & 4 \end{pmatrix} = A_a$

La sua ultima colonna è multipla della prima e quindi il numero di colonne indipendenti di A_a è uguale al numero di colonne indip. di

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 4 & 0 \\ 1 & a & a-2 \end{pmatrix} = A'_a$$

Poiché $\det A'_a = (a-2)(4-a^2) = -(a-2)^2(a+2)$, $\boxed{\text{se } a \neq \pm 2}$ si ha $\det A'_a \neq 0$ e quindi A'_a (e A_a) ha 3 colonne indipendenti cioè $\operatorname{Im} F_a$ ha dimensione 3 e quindi (teor. di nullità+rango) $\ker F_a$ ha dimensione $4-3=1$.

$\boxed{\text{Se } a = 2}$ $A'_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ha 1 sola colonna indipendente $\Rightarrow$ $\operatorname{Im} F_a$ ha dimensione 1 e quindi $\ker F_a$ ha dim. 3

$\boxed{\text{Se } a = -2}$ $A'_a = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ ha 2 colonne indipendenti $\Rightarrow$ $\operatorname{Im} F_a$ ha dimensione 2 e quindi $\ker F_a$ ha dim. $4-2=2$

II STRADA

Risolvo

$$\begin{cases} x+ay+4t=0 \\ ax+4y+4at=0 \\ x+ay+(a-2)z+4t=0 \end{cases}$$

con il metodo di GAUSS

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 4 & 0 \\ a & 4 & 0 & 4a & 0 \\ 1 & a & a-2 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4-a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se $a \neq \pm 2$ posso dividere la 2^a riga per $4-a^2$ e la 3^a per $a-2$ e ottengo

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ da cui $\begin{cases} x+4t=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ soluzioni $\begin{pmatrix} -4t \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: il nucleo ha dimensione 1 (1 sol parametro!)

Se $a=-2$ la seconda riga si annulla ma la terza no!

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\Rightarrow$ soluzioni $\begin{cases} x=+2h-4k \\ y=h \\ z=0 \\ t=k \end{cases}$ cioè $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}h + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}k$: il nucleo ha dim. 2

Se $a=2$ si annullano 2^a e 3^a riga: sol: $\begin{cases} x=-2h-4k \\ y=h \\ z=j \\ t=k \end{cases}$ cioè $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}h + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}j + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}k \Rightarrow$ il nucleo ha dim. 3

5. $M = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$ ha certamente una base di vettori ortonormale poiché è una matrice simmetrica a elementi reali.

Calcolo gli autovalori. Essendo $M-\lambda I$ una matrice diagonale a blocchi posso calcolare velocemente il det. come segue[1]:

$$\det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \left((1-\lambda)^2-1\right)(\lambda^2-1) =$$

$$= -\lambda(2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1) = \lambda(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

Quindi ho 4 autovalori distinti $\lambda=0$, $\lambda=2$, $\lambda=1$, $\lambda=-1$ cui corrispondono spazi di autovettori a due a due ortogonali (come verificheremo subito):

$\lambda=0$ $\quad M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x+y=0 \\ -t=0 \\ -z=0 \end{cases}$ autovettori: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} h$, $h \in \mathbb{R}^*$

$\lambda = 2$ $\quad \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & & \\ 1 & -1 & & \\ \hline & & -2 & -1 \\ & & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x-y=0 \\ 2z+t=0 \\ z+2t=0 \end{cases}$ autovettori: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} k$, $k \in \mathbb{R}^*$

$\lambda = 1$ $\quad \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ \hline & & -1 & -1 \\ & & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y=0 \\ x=0 \\ z+t=0 \end{cases}$ autovettori: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} l$, $l \in \mathbb{R}^*$

$\lambda = -1$ $\quad \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & & \\ \hline & & 1 & -1 \\ & & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x+y=0 \\ x+2y=0 \\ z-w=0 \end{cases}$ autovettori $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} j$, $j \in \mathbb{R}^*$

Si vede che il prodotto scalare di $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ per $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è zero così come lo è quello con gli altri 2 vettori che generano i restanti autospazi; similmente:

$(1,1,0,0) \cdot (0,0,1,-1) = (1,1,0,0) \cdot (0,0,1,1) = 0$ e $(0,0,1,-1) \cdot (0,0,1,1) = 0$.

Quindi questi vettori sono a 2 a 2 ortogonali (e formano quindi una base di $\mathbb{R}^4$). Per renderli ortonormali basta dividerli per la loro norma (o modulo) che per tutti è $\sqrt{2}$. Quindi una base ortonormale di autovettori per M è data da

$$\underline{v}_0 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

---

(1) oppure così il metodo di Laplace, calcolando lungo l'ultima riga (2 volte)

$$1 \cdot \left|\begin{array}{cc|c} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right| - \lambda \left|\begin{array}{cc|c} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\lambda \end{array}\right| = (\lambda^2-1) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \text{ ecc.}$$