Matematica del Discreto per F1X
28/1/2015

1. a) I due polinomi a coefficienti reali $p(x)=x^4+x^3-x-1$, $q(x)=x^3-x^2-x-2$ possono essere scomposti come segue in polinomi irriducibili in $\mathbb{R}(x)$

$p(x)=x^3(x+1)-1(x+1)=(x+1)\underbrace{(x-1)(x^2+x+1)}_{x^3-1}$

$q(x)=(x-2)(x^2+x+1)$ poiché $q(2)=8-4-2-2=0$ e

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

coefficienti del quoziente $\frac{q(x)}{x-2}$

Quindi $MCD(p(x), q(x))=(x^2+x+1)$ essendo questo l'unico fattore comune ai due polinomi.

In alternativa il MCD può essere determinato con l'algoritmo euclideo delle divisioni successive:

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^3-x-1 & x^3-x^2-x-2 \\ -x^4+x^3+x^2+2x & \overline{x+2} \leftarrow \text{quoziente} \\ \hline 2x^3+x^2+x-1 & \\ -2x^3+2x^2+2x+4 & \\ \hline 3x^2+3x+3 & \leftarrow \text{resto} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3-x^2-x-2 & 3x^2+3x+3 \\ -x^3-x^2-x & \overline{\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}} \\ \hline -2x^2-2x-2 & \\ 2x^2+2x+2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

e quindi $MCD(p,q)=3(x^2+x+1)$
o, equivalentemente $=x^2+x+1$
(essendo 3 invertibile in $\mathbb{R}$).

b) i due polinomi non hanno radici comuni in $\mathbb{R}$ poiché il loro MCD è irriducibile, avendo $\Delta<0$.

c) Se i due polinomi sono pensati come elementi di $\mathbb{Z}_3[x]$, visto che $[-2]=[1]$ e $[-1]=[2]$ in $\mathbb{Z}_3$ si ha

$p(x)=(x+[1])(x+[2])(x^2+x+[1])$
$q(x)=(x+[1])(x^2+x+[1])$ $\Big| \Rightarrow$ $q(x)$ divide $p(x)$ e quindi $MCD(p(x),q(x))=q(x)$

Notare che in questo caso $x^2+x+[1]$ ha radici poiché $[1]+[1]+[1]=[0]$ e quindi è divisibile per $x-[1]=x+[2]$ e anzi $(x+[2])^2=x^2+x+[1]$ poiché $2\cdot[2]=[1]$ e $[2]^2=[1]$.

Dunque $p(x)=(x+[2])\,q(x)$ e $q(x)=(x+[1])(x+[2])^2$.

2. a) La relazione R definita in $\mathbb{Z}^2$ da

$(a,b)\ R\ (a',b') \iff \exists k\in\mathbb{Z}$ t.c. $\begin{cases} a'-a=2k \\ b'-b=k \end{cases}$

è di equivalenza perché

•) è riflessiva: $(a,b)\,R\,(a,b)$ in quanto $\begin{cases} a-a=2\cdot k \\ b-b=k \end{cases}$ per $k=0$

••) è simmetrica: se $(a,b)R(a',b')$, cioè $\exists k\in\mathbb{Z}$ t.c. $\begin{cases} a'-a=2k \\ b'-b=k \end{cases}$ allora $\begin{cases} a-a'=2(-k) \\ b-b'=(-k) \end{cases}$

cioè $-k$ è esattamente il numero che serve per dire che $(a',b')R(a,b)$

•••) è transitiva: se $(a,b)R(a',b')$, cioè $\exists k\in\mathbb{Z}$ t.c. $\begin{cases} a'-a=2k \\ b'-b=k \end{cases}$

e se $(a',b')R(a'',b'')$, cioè $\exists k'\in\mathbb{Z}$ t.c. $\begin{cases} a''-a'=2k' \\ b''-b'=k' \end{cases}$

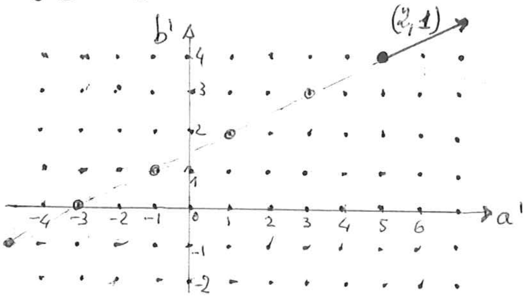
allora $a''-a=a''-a'+a'-a=2(k+k')$
$b''-b=b''-b'+b'-b=k+k'$
cioè $k+k'$ è il numero che serve per dire che $(a,b)R(a'',b'')$

b) $(a',0)R(5,4) \iff \exists k\in\mathbb{Z}$ t.c. $\begin{array}{l} 5-a'=2k \\ 4-0=k \end{array} \iff \begin{cases} a'=-3 \\ k=4 \end{cases}$ quindi $(a',0)=(-3,0)$

c) $(0,b')R(5,4) \iff \exists k\in\mathbb{Z}$ t.c. $\begin{cases} 5-0=2k \\ 4-b'=k \end{cases}$ impossibile poiché 5 non è pari! non esiste una coppia del tipo $(0,b')$ equivalente a $(5,4)$

NOTA: Che cosa c'è dietro? Fissato un punto (a,b) nel "piano" $\mathbb{Z}^2$ l'insieme di tutti i punti ad esso equivalenti (= la classe di equivalenza) è una "retta" di equazioni parametriche

$$\begin{cases} a' = a + 2k \\ b' = b + 1k \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$



In figura sono stati collegati con una retta di $\mathbb{R}^2$ alcuni punti appartenenti alla retta di $\mathbb{Z}^2$: $\begin{cases} a' = 5+2k \\ b' = 4+k \end{cases}$

Questa retta (che volendo si può scrivere nella forma più consueta $a' - 2b' + 3 = 0$) non ha intersezioni intere con l'asse b' (e quindi non ci sono punti equivalenti a $(5,4)$ della forma $(0,b')$) mentre ha intersezione intera con l'asse a', nel punto $(-3,0)$.

3 a) In $M_2(\mathbb{R})$ consideriamo l'operazione interna $A*B = AB + A + B$

- Essa è associativa poiché $\forall A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$ risulta (tenuto conto della pr. commut. di $+$ in $M_2(\mathbb{R})$)

$$(A*B)*C = (AB+A+B)*C = (AB+A+B)C + (AB+A+B) + C = ABC + AB + AC + BC + A + B + C$$
$$A*(B*C) = A*(BC+B+C) = A(BC+B+C) + A + (BC+B+C) = ABC + AB + AC + BC + A + B + C$$

cioè i due prodotti sono uguali.

Inoltre ha per elemento neutro la matrice nulla poiché

$$A*O = AO + A + O = O + A + O = A$$
$$O*A = OA + O + A = O + O + A = A$$

(Volendo RICAVARE QUALE MATRICE GIOCA IL RUOLO DI ELEM. NEUTRO N RISPETTO A $*$:

$$A*N = N*A = A \qquad \forall A \in M_2(\mathbb{R})$$

basta osservare che la cosa deve valere in particolare per $A = I$, matrice identica:

$$I*N = IN + I + N = N + I + N = 2N + I = I \iff 2N = O \iff N = O$$

e poi operare la verifica fatta sopra).

- L'operazione non è commutativa. Infatti

$$A*B = B*A \iff AB + A + B = BA + B + A,$$ cioè tenuto conto che $+$ è commutativo in $M_2(\mathbb{R})$

$$\iff AB = BA$$

Ora è ben noto che esistono matrici come ad es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ che non commutano rispetto al prodotto righe per colonne:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi anche $A*B$ sarà diverso da $B*A$ per queste 2 matrici.

b) La matrice I ha inversa $J = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ rispetto a $*$ poiché l'equazione

$$I*J = O \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff 2\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

ha soluzione in $\mathbb{R}$ e inoltre tale soluzione è anche inversa destra:

$$J*I = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Invece la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ non ha inversa poiché l'equazione

$$A*J = O \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} x+2z & y+2w \\ 2x+z & 2y+w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2x+2z & 2y+2w \\ 2x+2z & 2y+2w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

non può avere soluzione, dato che si chiede che $2(x+z)$ valga contemporaneamente -1 e -2.

4. a) I vettori $v_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\k\end{pmatrix}$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$ solo se sono indipendenti (in tal caso, essendo quanti la dimensione di $\mathbb{R}^3$ risultano anche un sistema di generatori e quindi una base per $\mathbb{R}^3$)

È evidente che $v_1 \neq \underline{0}$ e v_2 non è multiplo di v_1 e quindi $\{v_1, v_2\}$ è un sistema di vettori indipendente. Vediamo per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ anche v_3 è indip. da $\{v_1, v_2\}$ cioè l'equazione vettoriale

$$x v_1 + y v_2 = v_3$$

NON ha soluzioni.

$$\begin{cases} -2x + y = -1 \\ x = 1 \\ 4x - 2y = k \end{cases} \xLeftrightarrow[\text{la 1ª eq. alla terza}]{\text{Sommo 2 volte}} \begin{cases} -2x + y = -1 \\ x = 1 \\ \boxed{0 = k-2} \end{cases}$$

non ha soluzione se e solo se $k \neq 2$

Quindi i 3 vettori formano una base per ogni valore di k diverso da 2.

b) Se $k=2$, $\{v_1, v_2\}$ come già osservato sono indipendenti, mentre $v_3 = v_1 + v_2$. Quindi il sottospazio generato dai 3 vettori ha dimensione 2.

5) La matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ è sicuramente diagonalizzabile con una base di autovettori a due a due ortogonali poiché è simmetrica.

Cerchiamone gli autovalori. Il polinomio caratteristico:

$$|M - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right] = (2-\lambda)(2-\lambda-1)(2-\lambda+1)$$

si annulla per $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, $\lambda = 3$: questi sono i 3 autovalori di M.

$$(M-I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \text{autovettori relativi a } \lambda=1: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k\\0\\-k\end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$$

$$(M-2I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \text{autovettori relativi a } \lambda=2: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\h\\0\end{pmatrix}, h \in \mathbb{R}$$

$$(M-3I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+z=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \text{autovettori relativi a } \lambda=3: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}l\\0\\l\end{pmatrix}, l \in \mathbb{R}$$

I 3 autospazi trovati sono a due a due ortogonali: si tratta ora di trovare per ciascuno di essi un generatore di norma 1:

nel primo caso $\left\|\begin{pmatrix}k\\0\\-k\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2k^2} = 1$ per $k = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$: possiamo scegliere ad es. $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$

nel secondo caso $\left\|\begin{pmatrix}0\\h\\0\end{pmatrix}\right\| = |h| = 1$ per $h = \pm 1$: " " " " $h = 1$

nel terzo caso $\left\|\begin{pmatrix}l\\0\\l\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2l^2} = 1$ per $l = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$: " " " " $l = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Quindi la base di vettori ortonormali è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix} \right\}$$