Salvo avviso contrario, le due versioni sono condotte in parallelo e le spiegazioni sono nella vers. A.

VERSIONE A

1. Risolvere la congruenza lineare
$$13x \equiv 12 \mod 16$$
richiede la soluzione dell'equazione diofantea
$$(*) \quad 13x + 16k = 12.$$

Passi necessari:

A) stabilire se (*) è risolubile

B) determinare una soluzione (x_0, k_0) con x_0 appartenente a un certo "intervallo di INTERI" di ampiezza 16 e k " " " " " " 13

C) determinare tutte le soluz. di (*): $\begin{cases} x = x_0 + 16t \\ k = k_0 - 13t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{Z}$

D) le soluzioni della congruenza lin. sono gli interi $x = x_0 + 16t$

A) Si osserva che $MCD(13,16)=1$ divide 12 $\Rightarrow$ (*) è risolubile

B) Ci sono due metodi per trovare una soluzione: cominciamo con quello algoritmico SEMPRE FUNZIONANTE: algoritmo euclideo delle divisioni successive per la determinazione di $MCD(13,16)$:

$$\begin{aligned} 16 &= 1\cdot 13 + 3 \\ 13 &= 4\cdot 3 + 1 \\ 3 &= 3\cdot 1 + 0 \end{aligned} \longrightarrow MCD(16,13)=1 \Rightarrow \begin{aligned} 3 &= 16 - 1\cdot 13 \\ 1 &= 13 - 4\cdot 3 = 13 - 4(16 - 1\cdot 13) = \\ &= 13\cdot 5 + 16\cdot(-4) \end{aligned}$$

Quindi $\{a=5,\ b=-4\}$ è soluzione dell'equazione $\boxed{13a + 16b = 1}$

Moltiplicando per 12 ho che $\{x_0 = 5\cdot 12 = 60,\ k_0 = -4\cdot 12 = -48\}$ è una soluzione dell'equazione (*)

C) Tutte le soluzioni di (*) sono del tipo $\begin{cases} x = 60 + 16t \\ k = -48 - 13t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{Z}$

In particolare per $t=-3$ trovo $(x_1, k_1) = (12, -9)$ e quindi un altro modo per rappresentare tutte le soluzioni dell'eq. diofantea è
$$\boxed{\begin{cases} x = 12 + 16h \\ k = -9 - 13h \end{cases} \quad h \in \mathbb{Z}}$$

D) Quindi le soluzioni della congruenza lineare sono tutti e soli gli interi della forma $\boxed{x = 12 + 16h,\ h \in \mathbb{Z}}$

B') Metodo alternativo per determinare una soluzione legato al fatto che si lavora mod 16 e 16 è "PICCOLO"

IN OGNI CASO SI DEVE SPIEGARE COME SI ARRIVA AL RISULTATO

Leggere la congruenza lineare come equazione in $\mathbb{Z}_{16}$: $[13]x = [12]$.

Osservare che, visto che $MCD(13,16)=1$, la classe $[13]$ ha inverso cioè posso dire $x = [13]^{-1}\cdot[12]$. Cercare per tentativi "ragionati" $[13]^{-1}$

$\cdot$	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[12]	[13]	[14]	[15]
[13]			[7]		[1]										

non può avere rappresentanti pari, poiché sono divisori di zero

$\Rightarrow [13]^{-1} = [5] \Rightarrow x = [5][12] = [60] = [12]$: $\boxed{x = 12 \text{ è una soluzione della congr. lineare}}$

Alternativamente: osservare che $12\cdot 12 = 4^2\cdot 3^2 \equiv 0 \mod 16$ e quindi $13\cdot 12 = (1+12)\cdot 12 \equiv 12 \mod 16$

VERSIONE B

1. Risolvere la congruenza lineare
$$11x \equiv 14 \mod 16$$
richiede la soluzione dell'equazione diofantea
$$(**) \quad 11x + 16k = 14.$$

Passi necessari: come a fianco, sostituendo 11 a 13.

A) $MCD(11,16)=1$ divide 14 $\Rightarrow$ (**) è risolubile

B) metodo algoritmico: algoritmo euclideo delle divisioni successive per la determinazione di $MCD(11,16)$

$$\begin{aligned} 16 &= 1\cdot 11 + 5 \\ 11 &= 2\cdot 5 + 1 \\ 5 &= 5\cdot 1 + 0 \end{aligned} \longrightarrow MCD(16,11)=1 \Rightarrow \begin{aligned} 5 &= 16 - 1\cdot 11 \\ 1 &= 11 - 2\cdot 5 = 11 - 2(16 - 1\cdot 11) = 11\cdot 3 + 16(-2) \end{aligned}$$

Quindi $(a=3,\ b=-2)$ è soluzione dell'equazione $\boxed{11a + 16b = 1}$

Moltiplicando per 14 ho che $\{x_0 = 42,\ k_0 = -28\}$ è una soluzione di (**)

C) Tutte le solus. di (**) sono del tipo $\begin{cases} x = 42 + 16t \\ k = -28 - 11t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{Z}$

In part. per $t=-2$ trovo $(x_1, k_1) = (10, -6)$ e quindi un altro modo per rappresentare le sol. dell'eq. diofantea (**) è
$$\boxed{\begin{cases} x = 10 + 16h \\ k = -6 - 11h \end{cases} \quad h \in \mathbb{Z}}$$

D) Quindi le sol. della congruenza lineare sono tutti e soli gli interi della forma $\boxed{x = 10 + 16h,\ h \in \mathbb{Z}}$

B') Metodo alternativo per determinare una soluzione

IN OGNI CASO SI DEVE SPIEGARE COME SI ARRIVA AL RISULTATO

... equazione in $\mathbb{Z}_{16}$: $[11]x = [14]$

.... $MCD(11,16)=1 \Rightarrow [11]$ è invertibile $\Rightarrow x = [11]^{-1}[14]$. Tentativi ragionati:

$\cdot$	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[12]	[13]	[14]	[15]
[11]			[1]												

$\Rightarrow [11]^{-1} = [3] \Rightarrow x = [3][14] = [42] = [10] \Rightarrow \boxed{x = 10 \text{ è una sol. della congr. lineare}}$

Alternativamente: cercare coppie (x, k) tali che $11x$ sia "abbastanza vicino" a $16k$. La coppia $(3,2)$ porta a scoprire $11\cdot 3 - 16\cdot 2 = 1$ ecc. come sopra; $(5,3)$: $11\cdot 5 - 16\cdot 3 = 7 \Rightarrow$ moltiplico per 2: $11\cdot 10 - 16\cdot 6 = 14 \Rightarrow x = 10$ è una soluz.

VERSIONE A

2. $X=\{a\in\mathbb{Q},\ a>0\}$. Relazione d'ordine: $\forall a,b\in\mathbb{Q}$
$$a\le b \iff \exists n\in\mathbb{N} \text{ t.c. } b=na$$

a) L'insieme $A=\{a\in X \mid a\le \frac{1}{2}\}$ è formato dagli $a\in\mathbb{Q}^+$ per cui $\exists n\in\mathbb{N}$ t.c. $\frac{1}{2}=na$. Cioè sono i numeri razionali positivi della forma $a=\frac{1}{2n}$ al variare di n in $\mathbb{N}^*=\mathbb{N}\setminus\{0\}$:
$$\boxed{A=\left\{a=\frac{1}{2n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}}$$

b) Per trovare $\inf\{\frac{1}{2},\frac{3}{5}\}$ si deve trovare il massimo tra gli elementi di X che sono contemporaneamente $\le\frac{1}{2}$ e $\le\frac{3}{5}$. Con conti analoghi a quelli del punto a) si trova che $B=\{b\in X \mid b\le\frac{3}{5}\}=\{b=\frac{3}{5m},\ m\in\mathbb{N}^*\}$ e
$$a=\frac{1}{2n}=\frac{3}{5m}=b \iff 5m=6n$$ equazione che ha soluzioni del tipo $n=5k$, $m=6k$ con $k\in\mathbb{N}^*$.
Quindi gli elementi di $A\cap B$ hanno la forma $\frac{1}{10k}$ (o, che è lo stesso, $\frac{3}{30k}$): tra questi il più grande rispetto alla rel. d'ordine $a\le b \iff \exists n\in\mathbb{N}$ t.c. $b=na$ è $\boxed{\frac{1}{10}}$. (infatti $\forall k>1$: $\frac{1}{10}=k\cdot\frac{1}{10k}$).

c) Il minimo di X rispetto a $\le$ non esiste!
Infatti, per ogni scelta di $m\in X$, il numero $\frac{m}{2}$ sta in X e, visto che $m=2\cdot\frac{m}{2}$, risulta
$$\frac{m}{2}\le m$$
cioè non esiste un numero di X minore di tutti gli altri numeri di X.

VERSIONE B

2. $X=\{a\in\mathbb{Q},\ a>0\}$. Rel. d'ordine: $\forall a,b\in\mathbb{Q}$
$$a\le b \iff \exists n\in\mathbb{N} \text{ t.c. } a=nb$$

a) l'insieme $B=\{b\in X \mid \frac{1}{3}\le b\}$ è formato dai $b\in\mathbb{Q}^+$ per cui $\exists n\in\mathbb{N}$ t.c. $\frac{1}{3}=nb$. Cioè sono ...
$$\boxed{B=\left\{b=\frac{1}{3n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}}$$

b) Per trovare $\sup\{\frac{1}{3},\frac{2}{5}\}$ si deve trovare il minimo tra gli elementi di X che sono contemporaneamente $\ge\frac{1}{3}$ e $\ge\frac{2}{5}$. Come sopra
$$A=\{a\in X \mid a\ge\tfrac{2}{5}\}=\{a=\tfrac{2}{5m},\ m\in\mathbb{N}^*\}$$
e $b=\frac{1}{3n}=\frac{2}{5m}=a \iff 5m=6n$ equazione che ha soluzioni del tipo $n=5k$, $m=6k$ con $k\in\mathbb{N}^*$.
Quindi gli elementi di $A\cap B$ hanno la forma $\frac{1}{15k}$ con $k\in\mathbb{N}^*$ (o $\frac{2}{30k}$ che è lo stesso). Tra questi il minimo rispetto alla relazione $a\le b \iff \exists n$ t.c. $a=nb$ è $\boxed{\frac{1}{15}}$ (infatti $\forall k>1$, $\frac{1}{15}=k\cdot\frac{1}{15k}$)

c) Il massimo di X rispetto a $\le$ non esiste.
Infatti, per ogni scelta di M in X, il numero $\frac{M}{2}$ sta in X e, visto che
$$M=2\cdot\frac{M}{2},$$
risulta $$M\le\frac{M}{2}$$
cioè non esiste alcun numero di X maggiore di tutti gli altri numeri di X.

VERSIONE A

3. $U = \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle$, $W = \langle \underline{w}_1, \underline{w}_2 \rangle$ in $\mathbb{R}^4$ con $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Per determinare una base dello spazio vett.

$$U+W = \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{w}_1, \underline{w}_2 \rangle$$

osserviamo innanzitutto che $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ sono un sistema di vettori indipendente poiché non sono uno multiplo dell'altro. Vediamo ora se $\underline{w}_1$ è indipendente da $\underline{u}_1, \underline{u}_2$, cioè se NON ESISTONO $x, y \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\underline{w}_1 = x\underline{u}_1 + y\underline{u}_2 \; :$$

$$\begin{cases} 2 = 0 + y \\ 3 = x + 2y \\ 1 = x + y \\ 4 = 2x + 3y \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2 \\ x = 3-4 \\ x = 1-2 \\ 4-6 = 2x \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

e le altre equazioni danno soluzioni coerenti: $x = -1$!

quindi $w_1 = -\underline{u}_1 + 2\underline{u}_2$ non è indipendente dai primi due vettori.

Vediamo se $\underline{w}_2$ è indipendente da $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ con lo stesso sistema:

$$\underline{w}_2 = x\underline{u}_1 + y\underline{u}_2$$

$$\begin{cases} 0 = 0 + y \\ 0 = x + 2y \\ 1 = x + y \\ 0 = 2x + 3y \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

impossibile che siano vere entrambe $\Rightarrow$ non c'è sol. al sistema

Quindi $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{w}_2\}$ sono un sistema indipendenti di $\mathbb{R}^4$ che genera $U+W$ (dato che genera anche il restante generatore $\underline{w}_1$) e quindi sono una base di $U+W$.

b) Ne segue che $\dim(U+W) = 3$ e quindi non può coincidere con $\mathbb{R}^4$ che ha dimensione 4.

ATTENZIONE: il punto a) poteva essere svolto molto più velocemente chiedendosi quante (e quali) sono le colonne indipendenti della matrice ottenuta accostando i 4 vettori. Non sono 4 poiché

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{3+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot 0$$

essendo la 3ª colonna somma della 1ª e della 2ª.

L'ultima colonna e le prime due però sono palesemente indip., ad esempio perché si possono riorganizzare come

$$(\underline{u}_2, \underline{u}_1, \underline{w}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

in cui le componenti nulle dicono che non si può ottenere uno come comb. lin. degli altri due.

VERSIONE B

3. $U = \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle$, $W = \langle \underline{w}_1, \underline{w}_2 \rangle$ in $\mathbb{R}^4$ con $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Come a lato(1), ma qui invece di portare avanti separatamente i due sistemi (che hanno ugual matrice dei coefficienti!), risolviamo entrambi con il metodo di Gauss, tenendo insieme (in due colonne accostate) le colonne dei termini noti. Cioè le coppie di sistemi

① $x\underline{u}_1 + y\underline{u}_2 = \underline{w}_1$ e ② $x'\underline{u}_1 + y'\underline{u}_2 = w_2$ diventa in termini matrici:

$$(\underline{u}_1 | \underline{u}_2 | \underline{w}_1 | \underline{w}_2) = \left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

matr. coeff.

termini noti del 2º sistema

termini noti del 1º sistema

Che sottraendo la 1ª riga dalla 3ª e dalla 4ª e $\frac{1}{2}$ la 1ª riga dalla 2ª diventa:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{sottraendo 2 volte la 3ª alla 4ª riga}} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{}$$

moltiplicando la 3ª per -1 e sottraendo 2 volte la riga che risulta dalla 1ª

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

questa matrice ci dice che il sistema ① ha soluzione $\{x = 2, y = -1\}$ cioè

$$\underline{w}_1 = 2\underline{u}_1 - \underline{u}_2 \Rightarrow \underline{w}_1 \text{ dipende da } \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$$

mentre il sistema ② non ha soluzione poiché porta (in 2 delle 4 equazioni) all'equazione impossibile $0x + 0y = c$ con $c \neq 0$. Quindi $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{w}_2$ sono indipendenti, generano $U+W$ (COME SPIEGATO a lato) e quindi sono una base di $U+W$ che risulta quindi avere dimensione 3

b) Poiché $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ non può essere $U+W = \mathbb{R}^4$

---

(1) Attenzione: rispetto al metodo degli scarti successivi facciamo un passo potenzialmente inutile poiché se il 3º vettore fosse indipendente dai primi due dovremmo poi risolvere un sistema diverso, che ha come matrice dei coefficienti le prime 3 colonne: ma in questo caso cambia solo l'interpretazione delle prime 3 colonne della matrice scritta... non i conti.

VERSIONE A

4. Dire che il vettore $\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene a $Im(f_k)$ con $f_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ appl. lineare definita da $f_k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \\ k & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ significa che ha soluzione il sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \\ k & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ci sono due modi di procedere

A) Metodo di GAUSS

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4-2k & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4-2k \end{array}\right)$$

le equazioni rappresentate dalle prime due righe formano un sistema risolubile $(y=-1,\ x=2)$, l'ultima ha soluzione (cioè è addirittura un'identità) se e solo se $\boxed{k=2}$

Quindi il sistema è risolubile solo per $k=2$ e di conseguenza solo per $k=2$ $\underline{w} \in Im(f_k)$.

B) Il sistema è risolubile se e solo se la colonna $\underline{w}$ dipende dalle due, palesemente indipendenti, della matrice A_k, cioè sse

$$\det\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 4 & 0 \end{array}\right) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 4 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ k & 4 \end{vmatrix} = -(-4+2k) = 0 \iff k=2$$

5. Gli autovalori della matrice simmetrica $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M$ sono le soluzioni dell'eq. caratteristica $\det(M - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 4\right] = (3-\lambda)(1-\lambda-2)(1-\lambda+2) = 0$$

$\iff \lambda = -1$ e $\lambda = 3$ 2 volte

autovettori relativi a $\lambda=-1$:

$$\begin{cases} (1+1)x + 2z = 0 \\ 4y = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{pmatrix} \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

VERSIONE B (Completare come a lato!)

4. . . . . . $\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

. . . . $f_k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \\ k & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

. . . . . .

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \\ k & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Due modi:

A) Metodo di GAUSS

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ k & 3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & k+3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & k+3 \end{array}\right)$$

Le eq. rappresentate dalle prime due righe formano un sistema risolubile $(y=-1,\ x=-1)$, l'ultima ha soluzione . . . . se e solo se $\boxed{k=-3}$

. . . .

B) sist. risolubile $\iff$ la colonna $\underline{w}$ dipende dalle due palesemente indipendenti della matrice A_k $\iff$

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ k & 3 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\parallel$$

$$(-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ k & 3 \end{vmatrix} = -(-3-k) = 0 \iff k=-3.$$

5. Gli autovalori di . . . . $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = M$ sono le soluzioni di . . .

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(3-\lambda)^2 - 4\right] = (1-\lambda)(3-\lambda-2)(3-\lambda+2) = 0$$

$\iff \lambda = 5$ e $\lambda = 1$ 2 volte

autovettori relativi a $\lambda=5$

$$\begin{cases} (3-5)x + 2z = 0 \\ -4y = 0 \\ 2x + (3-5)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

autovettori relativi a $\lambda=3$

$$\begin{cases} (1-3)x + 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 2x + (1-3)z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x+2z=0 \\ y \text{ qualsiasi!} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ \ell \\ h \end{pmatrix}, \; h,\ell \in \mathbb{R}$$

Come prevedibile (essendo M simmetrica) la molteplicità geometrica coincide con quella algebrica.
Cerchiamo una base ortogonale per l'autospazio relativo a $\lambda=3$

$\begin{pmatrix} h \\ \ell \\ h \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \ell\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: si vede che i due vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono ortogonali poiché $1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 = 0$.
Il secondo ha già norma 1. Il primo ha norma $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Quindi una base ortonormale per l'autospazio relativo a $\lambda=3$ è data da
$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Per quanto riguarda i vettori dell'autospazio relativo a $\lambda=-1$ si vede che la loro norma $\sqrt{2k^2}$ è $=1$ per $k = \pm 1/\sqrt{2}$; quindi ad es. un vettore di norma 1 nell'autospazio è $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Visto che autovettori relativi ad autovalori distinti di una matrice simmetrica sono sicuramente ortogonali, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di M è data da

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

autovettori relativi a $\lambda=1$

$$\begin{cases} (3-1)x + 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 2x + (3-1)z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+2z=0 \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ \ell \\ -h \end{pmatrix}, h,\ell \in \mathbb{R}$$

. . . .

. . .

. . . . . base ortogonale per l'autospazio relativo a $\lambda=1$

$\begin{pmatrix} h \\ \ell \\ -h \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \ell\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: i due vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

sono ortogonali: $1\cdot 0 + 0\cdot 1 + (-1)\cdot 0 = 0$

. . . .

. . . . base ortonormale per l'autospazio relativo a $\lambda=1$:

$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

. . . . autospazio relativo a $\lambda=5$ . . . . vettore di norma 1 : $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ . . . .

. . . .

. . .

base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di M:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

COMPLETARE COME A LATO!!!