*Cognome*__________________________*Nome*______________________*matr.*________

*Non posso sostenere l'**orale** nei seguenti giorni* …………………………………………
indirizzo e-mail:

ISTRUZIONI. Consegnare questo foglio insieme allo svolgimento. *Compilare l'**intestazionein stampatello** e, per ogni esercizio svolto,barrare la **casella** vicino al numero. Svolgere ciascun esercizio su una **diversa pagina** di foglio protocollo, dando le opportune giustificazioni. Ogni quesito vale 7 punti.*

Matematica del Discreto/ Matematica discreta - per Informatica

4 novembre 2014 (versione A)

1) ☐

a) Stabilire se è risolubile l'equazione diofantea $24x + 73y = 12$ e, in caso affermativo, determinarne le soluzioni.

b) Sia $\mathbb{Z}_{73}$ il campo delle classi di resto modulo 73. Determinare l'inverso moltiplicativo di $[24]$ in $\mathbb{Z}_{73}$.

2) ☐ Considerare l'insieme delle coppie ordinate di numeri interi

$$S = \{ (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 3 \leq x \leq 6, \quad -2 \leq y \leq 2 \}$$

e la relazione d'ordine $\leq$ tra gli elementi di S definita da

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \text{ se e solo se } x_1 < x_2 \text{ oppure } x_1 = x_2 \text{ e } y_1 \geq y_2$$

a) Verificare che $\leq$ è una relazione d'ordine totale in S.

b) Determinare il massimo di S rispetto a $\leq$.

c) Se si elencano le coppie in ordine crescente, in quale posizione si trova la coppia $(5,-2)$?

3) ☐ Nell'anello $M_2(\mathbb{R})$, con le ordinarie operazioni di somma e prodotto, considerare l'insieme

$$X = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), \text{ con } ab - c^2 \neq 0 \right\}.$$

a) Mostrare che esiste almeno una coppia di matrici di X il cui prodotto non è commutativo.

b) Stabilire se, rispetto al prodotto di matrici, X è un gruppo.

c) Stabilire se, rispetto alla somma di matrici, X è un gruppo.

4) ☐ Determinare una base $\mathcal{B}$ del sottospazio U dello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ generato dalle matrici $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Completare la base trovata a una base dello spazio (di dimensione 4) $M_2(\mathbb{R})$.

5) ☐ Considerare la matrice $M_k = \begin{pmatrix} k & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Determinare le radici del polinomio caratteristico di M_k.

b) Per $k = 0$ e $k = 1$, stabilire se M_k è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare una base di autovettori.