Matematica del discreto per Informatica. 4/11/2014

VERSIONE A

1a) L'equazione diofantea
$$24x + 73y = 12 \qquad (*)$$
è sicuramente risolubile poiché
$$MCD(24,73) = 1$$ essendo 73 un numero primo (non fattore di 24)
e 1 divide il termine noto 12.

Si vede che $(-3)\cdot 24 + 1\cdot 73 = 1$.

Quindi una soluz. di $(*)$ è $\begin{cases} x_0 = -3\cdot 12 = -36 \\ y_0 = 1\cdot 12 = 12 \end{cases}$

e $\begin{cases} x = -36 + 73k \\ y = 12 - 24k \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono tutte e sole le soluz. dell'eq. diofantea $(*)$

1b) Per trovare l'inverso moltiplicativo di $[24]_{73}$ in $(\mathbb{Z}_{73}, +, \cdot)$ basta risolvere la congruenza lineare
$$24x \equiv 1 \mod 73$$
cioè l'eq. diofantea $24x + 73y = 1$, che è ciò che è appena stato fatto. Una sol. della congruenza lineare è $x = -3$ e quindi la classe inversa di $[24]_{73}$ è $[-3]_{73} = [70]_{73}$.

2a) Il testo garantisce già che $\leq$ è una rel. d'ordine. Devo verificare che tale ordine è totale cioè che comunque prese due coppie in S sono confrontabili, cioè che posso allineare le coppie di S in una catena (si può usare il diagramma di Hasse, volendo)
Elenchiamo gli elementi in ordine crescente organizzandoli in una tabella in cui ogni colonna incomincia con un valore di x maggiore che nella colonna precedente e ogni riga con un valore di y minore di quello della riga precedente

VERSIONE B

1a) L'equazione diofantea
$$22x + 89y = 11 \qquad (*)$$
è sicuramente risolubile poiché
$$MCD(22,89) = 1$$ essendo 89 un numero primo (non fattore di 22)
e 1 divide il termine noto 11.

Si vede che $(-4)\cdot 22 + 89 = 1$

Quindi una soluz. di $(*)$ è $\begin{cases} x_0 = -4\cdot 11 = -44 \\ y_0 = 1\cdot 11 = 11 \end{cases}$

e $\begin{cases} x = -44 + 89k \\ y = 11 - 22k \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono tutte e sole le soluzioni dell'eq. diofantea $(*)$.

1b) Per trovare l'inverso moltiplicativo di $[22]_{89}$ in $(\mathbb{Z}_{89}, +, \cdot)$ basta risolvere la congruenza lineare
$$22x \equiv 1 \mod 89$$
cioè l'eq. diofantea $22x + 89y = 1$, che è ciò che è appena stato fatto. Una sol. della congruenza lineare è $x = -4$ e quindi la classe inversa di $[22]_{89}$ è $[-4]_{89} = [85]_{89}$.

2a) IDEM $\leftarrow$

$S = \{ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 3 \le x \le 6,\ -2 \le y \le 2 \}$

(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
^ (3,1)	v (4,1) ^	(5,1) ^	(6,1) ^
^ (3,0)	(4,0) ^	v (5,0) ^	v (6,0) ^
^ (3,-1)	(4,-1) ^	(5,-1) ^	(6,-1) ^
^ (3,-2)	(4,-2)	(5,-2)	(6,-2)

Come si vede gli elem. di S si possono elencare in una catena crescente di 20 elementi che inizia con (3,2) e finisce con (6,-2)

b) Quindi il massimo è (6,-2)

c) La coppia (5,-2) è in 15-ma posizione

$S = \{ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -2 \le x \le 2,\ 2 \le y \le 5 \}$

(-2,5)	(-1,5)	(0,5)	(1,5)	(2,5)
^ (-2,4)	v ^ (-1,4)	v ^ (0,4)	v ^ (1,4)	v ^ (2,4)
^ (-2,3)	^ (-1,3)	^ (0,3)	^ (1,3)	^ (2,3)
^ (-2,2)	^ (-1,2)	^ (0,2)	^ (1,2)	^ (2,2)

Gli elementi di S si possono elencare in una catena crescente di 20 elementi che inizia con (-2,5) e termina con (2,2).

b) Quindi il minimo di S risp. a $\le$ è (-2,5)

c) La coppia (-1,5) sta in 5^a posizione.

3) A parte il differente nome dato agli elementi della matrice, questo problema è lo stesso nelle due versioni. Lo si svolge nella versione A.

$X = \{ A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),\ \text{con } ab - c^2 \neq 0 \}$

a) Si devono trovare due matrici concrete che stiano entrambe in X e che non commutino. Ad es $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, che hanno determinante risp. -1 e 2 (quindi $\neq 0$) sono tali che

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi i due prodotti sono diversi

b) Il precedente esempio mostra che il prodotto di due matrici di X non sempre è una matrice di X, poiché $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha gli elementi di posto (1,2) e (2,1) sono diversi. Quindi X non può essere un gruppo rispetto al ~~prodotto~~ prodotto di due matrici (poiché l'operazione dovrebbe essere interna in X).

c) Allo stesso modo (X,+) non è un gruppo poiché $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ appartengono a X ma la loro somma $I + (-I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non appartiene a X poiché ha determinante nullo, e quindi anche in questo caso l'operazione non è interna a X.

4) Stabiliamo quanti dei generatori

$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

di U sono indipendenti.
È chiaro che $\{M_1\}$ è indipendente poiché $\neq 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e che $\{M_1, M_2\}$ sono indip. poiché M_2 non è multiplo di M_1.

4) Stabiliamo quanti dei generatori

$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

di U sono indipendenti.
È chiaro che $\{M_1\}$ è indip. poiché $\neq 0$ e che $\{M_1, M_2\}$ sono indip. poiché M_2 non è multiplo di M_1.

Anche $\{M_1, M_2, M_3\}$ sono indipendenti poiché M_3 non è comb. lineare di M_1 e M_2 poiché ← $\boxed{\text{IDEM}}$

$$\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x&x\\y&y\end{pmatrix}$$ ma x non può essere $=0$ e $=1$ a un tempo

Resta da vedere se M_4 dipende dalle altre 3 matrici ← $\boxed{\text{IDEM}}$:

$$\begin{pmatrix}0&2\\1&3\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}0&2\\1&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+z&x\\y+z&y\end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x=2\\ y=3\\ x+z=0 \Rightarrow z=-2\\ y+z=1 \Rightarrow z=-2 \end{cases} \text{coerente}$$

Quindi:
$M_4 = 2M_1 + 3M_2 - 2M_3$.

Di conseguenza una base $\mathcal{B}$ per U è data da $\{M_1, M_2, M_3\}$ e per completare la base basta aggiungere una matrice che non abbia la forma $\begin{pmatrix}x+z&x\\y+z&y\end{pmatrix}$, ad es. $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = M_5$

$\{M_1, M_2, M_3, M_5\}$ è una base per $M_2(\mathbb{R})$.

5a) Per determinare il polinomio caratteristico di $M_K = \begin{pmatrix}k&-1&0\\0&1&0\\k&0&0\end{pmatrix}$ basta calcolare $\det(M_K - \lambda I) = \begin{vmatrix}k-\lambda&-1&0\\0&1-\lambda&0\\k&0&-\lambda\end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(k-\lambda)$

Quindi le sue radici sono $\lambda=0$, $\lambda=1$, $\lambda=k$.
Se $k \neq 0, 1$ le tre radici sono distinte e quindi la matrice M_k è diagonalizzabile.

b) se $\boxed{k=1}$, l'autovalore $\lambda=1$ ha molteplicità algebrica 2: vediamo qual è la sua molteplicità geometrica:

$$(M_1 - I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\0\\t\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

cioè l'autospazio ha dimensione 1 e quindi la molt. geom. di $\lambda=1$ è 1 e M_1 non è diagonalizzabile.

se $\boxed{k=0}$, l'autovalore $\lambda=0$ ha molteplicità algebrica 2, ma

$$(M_0 - 0I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}0&-1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s\\0\\t\end{pmatrix}\ s,t \in \mathbb{R}$$

cioè anche la molt. geometrica di $\lambda=0$ è 2 $\Rightarrow M_0$ è diagonalizzabile. Poiché $(M_0 - I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&1-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
cioè gli autovettori relativi a 1 hanno la forma: $(t, -t, 0)^T$ con $t \in \mathbb{R}$, una base di autovettori di $\mathbb{R}^3$ è data da $(1,0,0)^T, (0,0,1)^T, (1,-1,0)^T$

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x&y\\x&y\end{pmatrix}$$ ma x non può essere a un tempo $=0$ e $=1$.

$$\begin{pmatrix}0&1\\2&3\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}0&1\\2&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+z&y+z\\x&y\end{pmatrix} \iff \begin{cases} x=2\\ y=3\\ x+z=0 \Rightarrow z=-2\\ y+z=1 \Rightarrow z=-2 \end{cases}$$

Quindi: $M_4 = 2M_1 + 3M_2 - 2M_3$.

Di conseguenza una base $\mathcal{B}$ per U è data da $\{M_1, M_2, M_3\}$ e per completare la base basta aggiungere una matrice che non abbia la forma $\begin{pmatrix}x+z&y+z\\x&y\end{pmatrix}$, ad es. $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = M_5$.

$\{M_1, M_2, M_3, M_5\}$ è una base per $M_2(\mathbb{R})$.

5a) Per determinare il polin. caratteristico di $M_K = \begin{pmatrix}0&0&k\\0&1&0\\0&-1&k\end{pmatrix}$ basta calcolare $\det(M_K - \lambda I) = \begin{vmatrix}-\lambda&0&k\\0&1-\lambda&0\\0&-1&k-\lambda\end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(k-\lambda)$.

Quindi le sue radici sono: $\lambda=0$, $\lambda=1$, $\lambda=k$.
Se $k \neq 0, 1$ le tre radici sono distinte e quindi M_k è diagonalizzabile.

b) se $\boxed{k=1}$ l'autovalore $\lambda=1$ ha molteplicità algebrica 2.
Vediamo qual è la sua molteplicità geometrica:

$$(M_1 - I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\0\\t\end{pmatrix}\ t \in \mathbb{R}$$

cioè l'autospazio ha dimensione 1 e quindi la moltepl. geom. di $\lambda=1$ è 1 e M_1 non è diagonalizzabile

Se $k=0$ l'autovalore $\lambda=0$ ha moltepl. algebrica 2 ma

$$(M_0 - 0\lambda)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s\\0\\t\end{pmatrix}, s,t \in \mathbb{R},$$

cioè anche la molteplicità geometrica di $\lambda=0$ è 2 $\Rightarrow M_0$ è diagonalizzabile. Poiché $(M_0 - I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\t\\-t\end{pmatrix}\ t \in \mathbb{R}$
si vede che una base di autovettori per $\mathbb{R}^3$ è data da $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\text{autovett. indipend. relativi a } \lambda=0}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\}$