*Cognome*__________________________*Nome*_____________________*matr.*________

*Non posso sostenere l'**orale**nei seguenti giorni*…………………………………………
indirizzo e-mail:

Consegnare questo foglio insieme allo svolgimento. *Compilare l'**intestazione in stampatello** e, per ogni esercizio svolto, barrare la **casella** vicino al numero. Svolgere ciascun esercizio su una **diversa pagina** di foglio protocollo, dando le opportune giustificazioni. Ogni quesito vale 7 punti.*

Matematica del Discreto/ Matematica discreta - per Informatica

28 gennaio 2015

1. ☐ a) Trovare il MCD dei due polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$

$$p(x) = x^4 + x^3 - x - 1 \qquad \text{e} \qquad q(x) = x^3 - x^2 - x - 2$$

b) Stabilire se i due polinomi hanno radici comuni in $\mathbb{R}$.

c) Stabilire se il loro MCD cambia quando i loro coefficienti sono pensati come rappresentanti di classi di resto in $\mathbb{Z}_3$.

2. ☐ Considerare in $\mathbb{Z}^2$ la relazione $\mathcal{R}$ così definita:

$$(a,b)\ \mathcal{R}\ (a',b') \text{ se e solo se esiste un } k\in\mathbb{Z} \text{ tale che } a'-a = 2k,\ \ b'-b = k.$$

a) Verificare che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza.

b) Se esiste, determinare una coppia della forma $(a',0)$ equivalente alla coppia (5,4).

c) Se esiste, determinare una coppia della forma $(0,b')$ equivalente alla coppia (5,4).

3. ☐ Considerare nell'insieme $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate di ordine 2 a elementi reali, l'operazione interna * definita da

$$A*B = A\cdot B + A + B$$

(ove + denota la somma ordinaria e $\cdot$ l'usuale prodotto righe per colonne).

a) Verificare che l'operazione *

- è associativa e dotata di elemento neutro (la matrice nulla);
- non è commutativa.

b) Mostrare che esiste l'***inverso rispetto a*** * della matrice identica I, ma non della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. ☐ a) Determinare per quali valori del parametro reale k i vettori $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$

costituiscono una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$.

b) Per il valore di k per il quale $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ non è una base, determinare la dimensione del sottospazio generato da S.

5. ☐ Determinare una base ortonormale di autovettori della matrice a coefficienti reali

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$