*Cognome*__________________________*Nome*____________________*matr.*________

*Posso sostenere l'***orale** *lunedì 2/3*: *dalle 10:30 alle 13:30* SI NO ; *dopo le 15:30* SI NO
indirizzo e-mail:

Consegnare questo foglio insieme allo svolgimento. *Compilare l'***intestazione in stampatello** *e, per ogni esercizio svolto,barrare la* **casella** *vicino al numero. Svolgere ciascun esercizio su una* **diversa pagina** *di foglio protocollo, dando le opportune giustificazioni.Ogni quesito vale 7 punti.*

Matematica del Discreto/ Matematica discreta - per Informatica

26 febbraio 2015

1. ☐ Determinare tutte le soluzioni della congruenza lineare $3x \equiv 5 \pmod{53}$.

2. ☐ Nel sottoinsieme dei numeri interi: $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 99\}$ considerare la relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ definita da:

$$x_1 \,\mathcal{R}\, x_2 \iff \text{la somma delle cifre di } x_1 \text{ è uguale alla somma delle cifre di } x_2.$$

   a) Dare un esempio di due numeri $x_1, x_2 \in S$ con $x_1 \neq x_2$ tali che $x_1 \,\mathcal{R}\, x_2$.
   b) Trovare tutti gli $x \in S$ la somma delle cui cifre è 12.
   c) Dimostrare esplicitamente che la relazione $\mathcal{R}$ soddisfa la proprietà transitiva.

3. ☐ a) Determinare una base del sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   b) Trovare un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = U + V$.

4. ☐ a) Determinare tutti i vettori del nucleo dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \qquad \text{con } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 0 & -6 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

   b) Posto $B = A^{\mathrm{T}}$, determinare il nucleo dell'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

5. ☐ a) Determinare le radici del polinomio caratteristico della matrice a coefficienti reali

$$M_a = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   b) Per $a = 2$ e per $a = -2$, stabilire se M_a è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare una base di autovettori di M_a.