Istituzioni di Matematiche (19/2/2014)

1) La funzione $f(x) = \ln(x^2+2x-2) - (x^2+2x-5)$

a) è definita purché $x^2+2x-2>0$ cioè in $(-\infty,-1-\sqrt{3})\cup(-1+\sqrt{3},+\infty)$ e ha limiti

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \ln(x^2)-x^2 = -\infty$ per confronto di infiniti $\left(\frac{\ln(x^2)}{x^2}\to 0\right)$

e non ammette asintoti obliqui in quanto ha l'andamento di x^2.

$\lim_{x\to(-1-\sqrt{3})^-} f(x) = \ln 0^+ - (2-3) = -\infty$: asintoto verticale di eq. $x=-1-\sqrt{3}$

$\lim_{x\to(-1+\sqrt{3})^+} f(x) = \ln 0^+ - (2-3) = -\infty$: asintoto verticale di eq. $x=-1+\sqrt{3}$

Due utili osservazioni.

(1) Detto $x_1=-1-\sqrt{3}$ e $x_2=-1+\sqrt{3}$ si ha $x_i^2+2x_i=2$ in quanto x_1,x_2 sono le radici di $x^2+2x-2=0$: si è sfruttata questa proprietà per trovare il valore della funz. x^2+2x-5 in $x=x_i$.

(2) Palesemente la funzione è simmetrica rispetto a $x=-1$. Infatti posso scrivere $f(x)=\ln\left((x+1)^2-3\right)-\left((x+1)^2-6\right)$ e quindi $f(-2-x)=f(x)\ \forall x\in$ I.D.

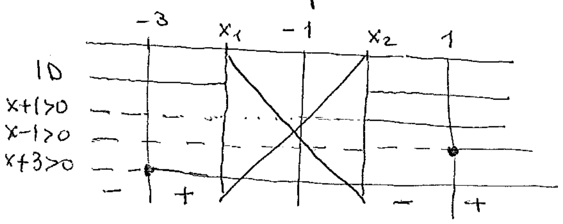
b) La funzione in $x=2$ vale $f(2)=\ln(6)-3$

La derivata della funzione: $f'(x)=\frac{2(x+1)}{x^2+2x-2}-2(x+1)$ in 2 vale $f'(2)=6\left(\frac{1}{6}-1\right)=-5$

Quindi l'equazione della tangente al grafico nel punto $(2,\ln(6)-3)$ è

$y=(\ln 6-3)-5(x-2)$ cioè $y=(\ln 6+7)-5x$

c) La derivata si può riscrivere come $f'(x)=\frac{2(x+1)(1-x^2-2x+2)}{x^2+2x-2} = \frac{-2(x+1)(x-1)(x+3)}{x^2+2x-2}$

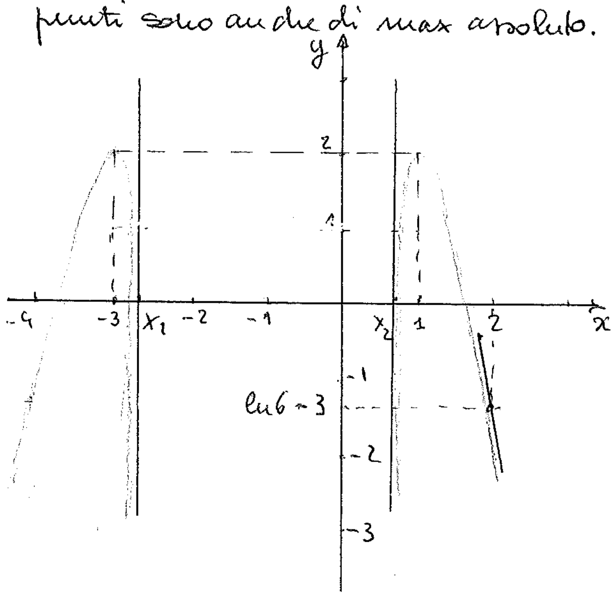


e quindi $f'(x)\ge 0$ per $\begin{cases}2(x+1)(x-1)(x+3)\le 0\\ x\in \text{I.D.}\end{cases}$

cioè per $x\in(-\infty,-3]$ e per $x\in(x_2,1]$.

Quindi la funzione cresce in $(-\infty,-3)$ e in $(x_2,1)$ e decresce in $(-3,x_1)$ e in $(1,+\infty)$ e ha due punti di massimo relativo in $x=-3$ e $x=1$.

Poiché $f(-3)=\ln(9-6-2)-(9-6-5)=2$ e $f(1)=\ln(1+2-2)-(1+2-5)=2$, i due punti sono anche di max assoluto.



Poiché $f(2)=\ln 6-3<0$ mentre $f(1)=2>0$ essendo su $[1,2]$ la funzione $f(x)$ continua ammette (per il teor. degli zeri) almeno 1 zero in tale intervallo e di fatto 1 solo poiché in tale intervallo $f(x)$ è monotona.
Similmente, essendo $\lim_{x\to x_2^+} f(x)=-\infty$ e $f(1)>0$ $f(x)$ ha uno zero nell'intervallo $(x_2,1]$.
Simmetricamente ha poi uno zero in $[-4,-3]$ e uno in $[-3,x_1)$

2. $\displaystyle\int \frac{(\tan 2x)^2+1}{1-(\tan 2x)^2}\,dx \underset{\boxed{\begin{array}{l} t=\tan 2x \\ dt = 2(1+(\tan 2x)^2)dx\end{array}}}{=} \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt =$

$= -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\tan 2x + 1}{\tan 2x - 1}\right| + c$

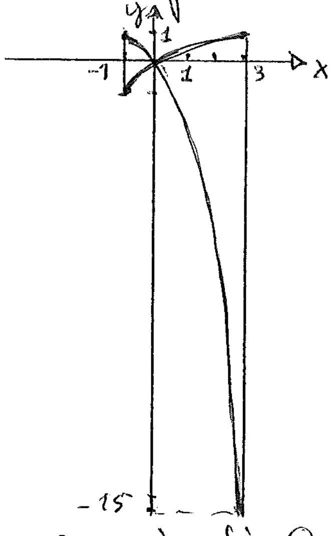
Quanto al dominio delle primitive osserviamo che l'integranda è definita per $\begin{cases}\tan 2x \neq \pm 1 \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\end{cases}$ cioè $\begin{cases} 2x \neq \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \iff x \neq \pm \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\end{cases}$

cioè in $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\left(-\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)\right)$

ed è continua in ciascuno dei singoli intervalli. Quindi gli intervalli massimali su cui è definita una primitiva sono del tipo

$\left(-\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\right)$ oppure $\left(-\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\right)$ oppure $\left(\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)$ ove $k\in\mathbb{Z}$.

3. La funzione $f(x)=\sqrt{x+1}-1$ ha grafico traslato di -1 nella direzione dell'asse x e di -1 nella direzione dell'asse y di $\sqrt{x}$. In particolare è definita su tutto l'intervallo $[-1,3]$, ivi crescente e $f(-1)=-1$, $f(0)=0$, $f(3)=1$.
La funzione $g(x)=\frac{20}{x-4}+5$ ha grafico traslato di 4 nella direz. dell'asse x e di 5 nella direz. dell'asse y di $\frac{20}{x}$. In particolare è definita in $[-1,3]$, ivi decrescente e $g(-1)=1$, $g(0)=0$, $g(3)=-15$



In particolare i due grafici si intersecano in $(0,0)$ e se $-1\leq x<0$ risulta $g(x)>0>f(x)$ mentre se $0<x\leq 3$ " $g(x)<0<f(x)$. Quindi l'area della regione di piano compresa tra i due grafici e le rette $x=-1$ e $x=3$ è

$$A = \int_{-1}^{0}(g(x)-f(x))dx + \int_0^3 (f(x)-g(x))dx.$$

Ora $\displaystyle\int\left(\frac{20}{x-4}+5-\sqrt{x+1}+1\right)dx = 20\ln|x-4|+6x-\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+c$

e quindi Area $= \left[20\ln|x-4|+6x-\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right]_{-1}^{0} - \left[20\ln|x-4|+6x-\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right]_0^3 =$

$= 2\left(20\ln 4-\frac{2}{3}\right)-(20\ln 5-6)-\left(20\ln 1+18-\frac{16}{3}\right) = 20\ln\frac{16}{5}-8$

4. $f(t)=\frac{(\text{sen}\,t)^2}{t^2}$ è una funzione definita in $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, continua su ognuno dei 2 intervalli e $\lim_{t\to 0} f(t)=1$.

Quindi $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ è integrale generalizzato in $t=0$ (manca la definizione nel punto ma definendo $f(0)=1$ si ripristina la continuità) e improprio di prima specie.

Notiamo che $\forall t\in(1,+\infty)$: $\frac{(\text{sen}\,t)^2}{t^2}\leq\frac{1}{t^2}$ e che $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}=1$ converge.

Poiché, $\forall t\in(1,+\infty)$, $f(t)>0$ si può applicare il criterio del confronto e concludere che $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. L'integrale $\int_0^{1} f(t)\,dt$ è un numero (integrale generalizzato) e la loro somma è di conseguenza convergente.

5. $f(x,y)=xy^3-24x^3+y^2$ è continua in $\mathbb{R}^2$, così come le sue derivate parziali 1e e 2e dato che si tratta di polinomi; quindi è possibile applicare la teoria di ottimizzazione locale.

$f_x=y^3-72x^2$

$f_y=3xy^2+2y=y(3xy+2)$

$\Rightarrow$ il gradiente si annulla se e solo se $\begin{cases} y=0 \text{ oppure } x=-\frac{2}{3y} \\ y^3-72x^2=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ oppure $\begin{cases}x=-2/3y\\ y^3-\cancel{72}^{8}\cdot\frac{4}{\cancel{9}y^2}=0\end{cases}$ cioè nei punti $(0,0)$ e $(-\frac{1}{3},2)$

$$H_f(x,y)=\begin{vmatrix}-2\cdot 72x & 3y^2\\ 3y^2 & 6xy+2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-48x & y^2\\ 3y^2 & 6xy+2\end{vmatrix}$$

nel punto $(-\frac{1}{3},2)$ vale : $3\left(16\cdot(-2)-3\cdot 16\right)<0$: $(-\frac{1}{3},2)$ è punto di sella

nel punto $(0,0)$ vale 0, ma è facile vedere che $f(x,0)=-24x^3$ non ha valori $\geq f(0,0)=0$ né $\leq f(0,0)$ in tutto un intorno del punto: quindi anche $(0,0)$ è un punto di sella.

6. $y''+3y'-4y=10e^{-4t}$ è un'equazione differenziale lineare del II ordine a coeff. costanti completa.

La eq. omogenea associata $z''+3z'-4z=0$ ha eq. caratteristica $r^2+3r-4=0$ (radici $r_1=1$, $r_2=-4$) e quindi ha soluzioni del tipo $z(t)=c_1e^{t}+c_2e^{-4t}$

una soluzione particolare non può quindi avere la forma $\bar{y}(t)=ke^{-4t}$ (questa è una soluzione dell'omogenea associata). Cerchiamo invece le soluz. tra quelle della forma $\bar{y}=kt\cdot e^{-4t}$, con $k\in\mathbb{R}$. Si ha: $\bar{y}'=k(1-4t)e^{-4t}$, $\bar{y}''=k(-8+16t)e^{-4t}$. Sostituisco nell'eq. diff completa:

$$k\left[(-8+16t)+3(1-4t)-4t\right]e^{-4t}=10e^{-4t} \qquad \Rightarrow -5k=10$$

$\Rightarrow$ Sol. particolare: $\bar{y}(t)=-2te^{-4t}$

$\Rightarrow$ integrale generale della completa: $y(t)=-2te^{-4t}+c_1e^t+c_2e^{-4t}$.

Osservo che $y'(t)=(8t-2)e^{-4t}+c_1e^t-4c_2e^{-4t}$; quindi la condizione di Cauchy: $y(0)=1$, $y'(0)=0$ è realizzata sse:

$$\begin{cases} 0+c_1+c_2=1 \\ -2+c_1-4c_2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1=1-c_2 \\ -5c_2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1=6/5 \\ c_2=-1/5 \end{cases}$$

La sol del problema di Cauchy è quindi

$$y(t)=-2te^{-4t}+\frac{6}{5}e^t-\frac{1}{5}e^{-4t}.$$

7. Il sistema $\begin{cases} 2x-y+3z-w=k \\ x-z+4w=k-1 \\ y-5z+9w=0 \end{cases}$ è risolubile se e solo se

la matrice dei coefficienti $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 9 \end{pmatrix}$ ha lo stesso rango di

$(A|\underline{b})=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & k \\ 1 & 0 & -1 & 4 & k-1 \\ 0 & 1 & -5 & 9 & 0 \end{array}\right)$.

È evidente che $\operatorname{rg}A\geq 2$ (ad es. perché contiene la sottomatrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ che ha $\det\neq 0$). Per vedere se il rango di A è 3 calcoliamo il determinante delle 2 matrici che si ottengono orlando $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ con le restanti 2 colonne di A (e l'ultima riga):

$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix}2\\1\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}-1\\0\\1\end{matrix} & \begin{matrix}3\\-1\\-5\end{matrix} \end{vmatrix} = 2-(5-3)=0$; $\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix}2\\1\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}-1\\0\\1\end{matrix} & \begin{matrix}-1\\4\\9\end{matrix} \end{vmatrix} = -8-(-9+1)=0$: poiché entrambi sono nulli, per il teor. di Kronecker

si deduce che $\operatorname{rg}A=2$ (cioè tutte le sottom. quadr. di ord. 3 hanno $\det=0$)

Il sistema sarà allora risolubile solo se anche $\operatorname{rg}(A|\underline{b})=2$.

Poiché anche $(A|\underline{b})$ contiene $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ si può orlare tale sottomatrice con le restanti colonne di $(A|\underline{b})$ – e 3ª riga –: delle 3 matrici risultanti 2 sono quelle già contenute in A; l'ultima ha det.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & k \\ 1 & 0 & k-1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(2k-2-k) = 0$$ per $k=2$: per tale valore il sistema

è risolubile e ha soluzione dipendente da $4 - rg A = 2$ parametri.

Volendo ricavarle conviene eliminare la 1ª equazione (certamente dipendente dato che $rg(A|b)=2$ e la 2ª e 3ª eq non sono multiple):

$$\begin{cases} x - z + 4w = 1 \\ y - 5z + 9w = 0 \end{cases}$$ ha soluzioni $(x,y,z,w) = (1+t-4s,\ 5t-9s,\ t,\ s)$.

8. Se $z = 5-12i$ è una radice terza di un numero complesso w, le altre 2 radici terze appartengono a un triangolo equilatero con un vertice in z e inscritto nella circonferenza con centro nell'origine e raggio $\sqrt{25+144} = 13$. Per trovarle basta moltiplicare z per i due numeri complessi che forniscono le rotazioni di $\frac{2\pi}{3}$ e di $-\frac{2\pi}{3}$:

$$z_1 = z\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right) = (5-12i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 6\sqrt{3} - \frac{5}{2} + i\left(6 + \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_{-1} = z\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = (5-12i)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -6\sqrt{3} - \frac{5}{2} + i\left(6 - \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$$