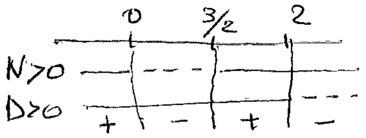
Istituzioni di Matematica per Chimica FOS (0F45) – 18/6/2014

1. a) La funzione $f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{2-x}$ è definita perché $2-x\neq 0$, quindi in $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.
Si annulla in $x=0$ e $x=3/2$ ed è positiva sse Num. e Den. della frazione sono concordi cioè in $(-\infty,0)$ e in $(3/2,2)$ come si evince dal diagramma (e negativa in $(0,3/2)$ e $(2,+\infty)$, ovviamente).



b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2(1-3/2x)}{-x(1-2/x)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}-2x=\mp\infty$. Ciò prova pure che

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-2$ e quindi $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)+2x=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\cancel{2x^2}-3x-\cancel{2x^2}+4x}{2-x}=-1$

cioè tanto per $x\to+\infty$ che per $x\to-\infty$ la retta $\boxed{y=-2x-1}$ è asintoto obliquo.

$\lim\limits_{x\to 2^\pm} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^\pm}\dfrac{8-6}{2-x}=\mp\infty$ e quindi la retta di eq. $\boxed{x=2}$ è asintoto verticale.

c) $f'(x)=\dfrac{(4x-3)(2-x)+2x^2-3x}{(2-x)^2}=\dfrac{-2x^2+8x-6}{(2-x)^2}=-2\,\dfrac{x^2-4x+3}{(2-x)^2}=-2\,\dfrac{(x-1)(x-3)}{(2-x)^2}$

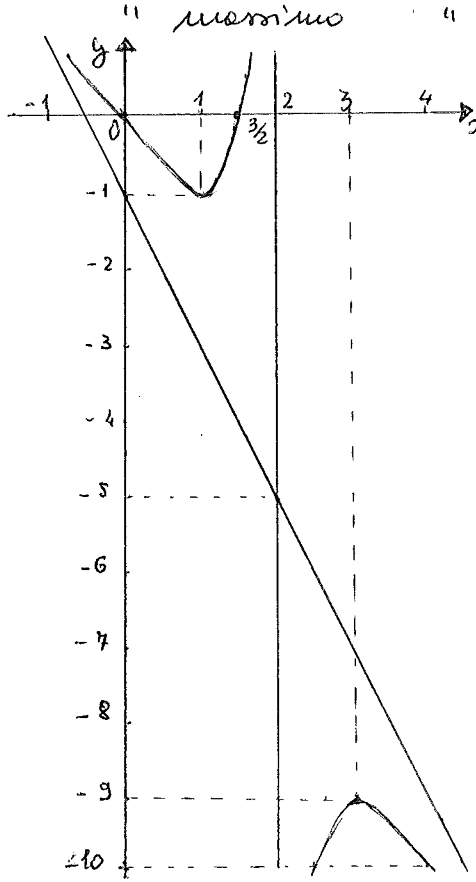
Quindi $\boxed{\text{in } x=0}$: $f'(0)=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$ e quindi l'eq. della retta tangente in $(0,0)$ è $\boxed{y=-\frac{3}{2}x}$;

$\boxed{\text{in } x=3/2}$: $f'(3/2)=\dfrac{-2(3/2-1)(3/2-3)}{(2-3/2)^2}=\dfrac{-2\cdot(\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1/4}=6$ e quindi l'eq. della retta tangente in $(3/2,0)$ è $\boxed{y=6(x-3/2)}$.

d) $f'(x)=-2\,\dfrac{(x-1)(x-3)}{(2-x)^2}\geq 0 \iff \begin{cases}(x-1)(x-3)\leq 0\\ x\neq 2\end{cases} \iff x\in(1,2)$ o $x\in(2,3)$

Quindi $f(x)$ è monotona crescente in $(1,2)$ e in $(2,3)$
" " decrescente in $(-\infty,1)$ e in $(3,+\infty)$

$f(x)$ ha minimo relativo (ma non assoluto) in $x=1$ e $f(1)=-1$;
" massimo " " " " in $x=3$ e $f(3)=-9$.



Osservo che:

$$f(4-x)=\frac{(4-x)(2(4-x)-3)}{2-4+x}=\frac{(4-x)(5-2x)}{x-2}=$$

$$=\frac{2x^2-13x+20}{x-2}=-\frac{2x^2-13x+20}{2-x}$$

Quindi

$$f(x)+f(4-x)+10=\frac{(2x^2-3x)-(2x^2-13x+20)+20-10x}{2-x}=0$$

La formula si può riscrivere

$$f(x)+f(4-x)=-10$$

cioè se prendo due punti (x_1,y_1), (x_2,y_2) del grafico tali che $x_1+x_2=4$ si ha $y_1+y_2=-10$.

Ciò descrive una situazione in cui il grafico è simmetrico rispetto al punto medio del segmento (x_1,y_1), (x_2,y_2) cioè rispetto a $(2,-5)$.

2. $\int (\cos 2x)\left((\sin 2x)^2 - \sin 2x + 1\right) dx = \boxed{\begin{array}{l}\text{per sostituzione}\\ t = \sin 2x \\ dt = 2(\cos 2x)dx\end{array}} = \frac{1}{2}\int (t^2 - t + 1)\,dt =$

$= \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + c = \frac{1}{6}(\sin 2x)^3 - \frac{1}{4}(\sin 2x)^2 + \frac{1}{2}\sin 2x + c$

è l'integrale indefinito della funzione assegnata. La primitiva che in $x = \frac{3\pi}{4}$ vale -1 è tale che (osservando che $\sin(2\cdot\frac{3\pi}{4}) = -1$):

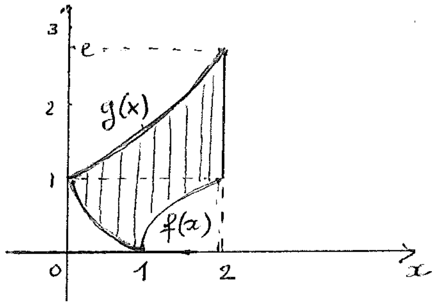
$$-\frac{1}{6} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + c = -1 \qquad \Rightarrow \quad c = -1 + \frac{11}{12} = -\frac{1}{12}$$

Quindi la primitiva richiesta è $\frac{1}{6}(\sin 2x)^3 - \frac{1}{4}(\sin 2x)^2 + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{12}$.

3. La funzione definita su $I = [0,2]$ da $f(x) = \begin{cases}(x-1)^2 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{se } 1 < x \le 2\end{cases}$ ha per

grafico, nell'intervallo $[0,1]$, l'arco di parabola convessa con vertice $(1,0)$ e asse // asse y ottenuta traslando la parabola di eq. $y = x^2$ di una unità in direzione e verso dell'asse x: come tale è decrescente e $0 \le (x-1)^2 \le 1$, e gli estremi sono raggiunti rispettivamente in $x=1$ (minimo) e $x=0$ (massimo); invece nell'intervallo $[1,2]$ ha per grafico l'arco di parabola con asse // asse x vertice in $(1,0)$ ottenuta traslando $x = y^2$ di 1 unità nella direzione e verso dell'asse x: come tale è crescente e $0 \le \sqrt{x-1} \le 1$, con massimo in $x = 2$.

La funzione $g(x) = e^{x/2}$ ha per grafico un'esponenziale crescente con minimo 1 in $x=0$ e massimo e in $x = 2$.



Quindi $\forall x \in [0,2]$ risulta $0 \le f(x) \le 1 \le g(x) \le e$ e di conseguenza l'area della regione di piano compresa tra grafico di $f(x)$ e di $g(x)$ e rette di eq. $x=0$ e $x=2$ è data da

$$\mathcal{A} = \int_0^2 (g(x) - f(x))\,dx = \text{per l'additività rispetto agli estremi di integraz.}$$

$$= \int_0^1 \left(e^{x/2} - (x-1)^2\right)dx + \int_1^2 \left(e^{x/2} - \sqrt{x-1}\right)dx$$

Osservo che $\int e^{x/2}dx = 2e^{x/2} + c$, $\int \sqrt{x-1}\,dx = \frac{2}{3}(\sqrt{x-1})^3 + c$ e quindi

$$\mathcal{A} = \left[2e^{x/2} - \frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1 + \left[2e^{x/2} - \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}\right]_1^2 = 2e + \frac{1}{3}(-1) - 2 - \frac{2}{3} = 2e - 3.$$

Da notare che lo stesso conto può essere fatto più agevolmente se si osserva che i 2 archi di parabola sono ottenuti uno dall'altro ruotando ad es. quello di $y = (x-1)^2$ intorno al punto $(1,0)$ di $-\frac{\pi}{2}$: quindi la regione tra $x=1$, $y=1$ e $y = f(x)$ (nell'intervallo $(1,2]$) ha la stessa area di quello tra $x=0$, $y=0$ e $y = f(x)$ (in $[0,1]$), cioè la regione tra $f(x)$ e $y = 1$ ha area 1. Quella tra $y=1$ e $y = e^{x/2}$, in $[0,2]$ ha area $\int_0^2 (e^{x/2} - 1)\,dx = 2(e-1) - 2 = 2e - 4$ e quindi $\boxed{\mathcal{A} = 2e - 4 + 1 = 2e - 3}$

4. La funzione $f(t) = \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}$ è definita in $(0, +\infty)$ (poiché deve essere definita $\sqrt{t}$, ma il denominatore non può annullarsi) ed è ivi continua e positiva: è quindi possibile applicare i vari criteri di confronto.

L'integrale $\int_{0^+}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{0^+}^1 f(t)\,dt + \int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ è improprio di II e I specie poiché in $(0,1]$ la $f(t)$ non è limitata e l'intervallo $[1, +\infty)$ è illimitato.

Per $t \to 0^+$, $f(t) \sim \frac{\sqrt{t}}{t} = \frac{1}{\sqrt{t}}$ $\Rightarrow$ poiché $\int_{0^+}^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$ converge anche $\int_{0^+}^1 f(t)\,dt$ converge per il criterio del confronto asintotico

Per $t \to +\infty$ $f(t) \sim \frac{\sqrt{t}}{e^t}$ e poiché per $t \geq 1$ $\frac{\sqrt{t}}{e^t} < \frac{1}{e^{t/2}}$ e $\int_1^{+\infty} e^{-t/2} dt = 2e^{-1/2}$ converge

per il criterio del confronto converge anche $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t} dt$ e per il criterio del confronto asintotico converge $\int_1^{+\infty} f(t) dt$.

Quindi l'integrale dato converge, in quanto somma di due integrali convergenti.

5. La funzione $f(x,y) = (\ln x)^2 + y \ln x + y^2$ è definita $\forall (x,y) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}$ e su tale semipiano risulta continua poiché somma di prodotti di funz. continue.

$$\left.\begin{array}{l} f_x = \frac{2}{x} \ln x + \frac{y}{x} = \frac{1}{x}(2\ln x + y) \\ f_y = \ln x + 2y \end{array}\right\}$$

nello stesso semipiano risultano pure continue, in quanto $\frac{1}{x}$ in $(0,+\infty)$ è definita e continua e le altre funzioni sono somme e prod. di funz. cont.

$$\left.\begin{array}{l} f_{xx} = -\frac{1}{x^2}(2\ln x + y) + \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x} \\ f_{xy} = \frac{1}{x} = f_{yx} \\ f_{yy} = 2 \end{array}\right\}$$

sono, similmente, continue nel semipiano.

Quindi per trovare i punti critici basta annullare il gradiente: $\text{grad} f = (f_x, f_y)$

$$\begin{cases} \frac{1}{x}(2\ln x + y) = 0 \\ \ln x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\ln x + y = 0 \\ \ln x + 2y = 0 \end{cases}$$

: sistema lineare omogeneo in $\ln x$ e y con matrice dei coefficienti $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ invertibile $\Rightarrow$ c'è 1 e 1 sola soluzione:

$\begin{cases} \ln x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$. Quindi l'unico punto critico è $\boxed{A = (1,0)}$

L'Hessiano di f calcolato in A: $H_f(A) = \begin{vmatrix} f_{xx}(A) & f_{xy}(A) \\ f_{yx}(A) & f_{yy}(A) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$

è positivo, quindi A è un estremante locale, precisamente (dato che $f_{yy}(A) > 0$) un minimo locale forte.

6. $y' = \frac{y(6-y)}{6t}$ è un'equazione differenziale del 1° ordine a variabili separabili. La funzione $a(t) = \frac{1}{t}$ è definita e continua in ciascuno dei 2 intervalli $(-\infty,0)$ e $(0,+\infty)$. Dato che il problema di Cauchy fornisce come condizione iniziale il valore di y in 1 che appartiene a $(0,+\infty)$ è questo l'intervallo di t cui si deve far riferimento.

Poiché $b(y) = y(6-y)$ è continua su $\mathbb{R}$, il teorema di Cauchy dice che esiste 1 e una sola soluzione del probl. di Cauchy $y(1) = 3$, e di ogni altro probl. $y(t_0) = y_0$, $t_0 \neq 0$.

Notiamo che le soluzioni costanti $y(t) = 0$ e $y(t) = 6$ non sono soluzioni del problema di Cauchy e che, dato che il valore che la soluzione deve assumere in 1 è compreso tra 0 e 6, tutta la soluzione deve avere immagine contenuta in $(0,6)$: altrimenti - essendo $y(t)$ derivabile e quindi continua in $(0,+\infty)$ - per il teorema dei valori intermedi dovrebbe assumere il valore 0 (o il valore 6) in un punto $t_0 \in (0,+\infty)$ contraddicendo l'unicità della sol. del probl. di Cauchy in $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$.

Risolviamo separando le variabili: $\int \frac{dy}{y(6-y)} = \int \frac{dt}{6t}$ (*)

Poiché $\frac{1}{y(6-y)} = \frac{A}{6-y} + \frac{B}{y} = \frac{(A-B)y + 6B}{y(6-y)} \iff \begin{cases} A = B \\ 6B = 1 \end{cases} \iff A = B = \frac{1}{6}$

$$\int \frac{dy}{y(6-y)} = \frac{1}{6} \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-6} \right) dy = \frac{1}{6}\left(\ln \left| \frac{y}{y-6} \right| + c_1 \right) = \frac{1}{6}\left(\ln \left(\frac{y}{6-y} \right) + c_1 \right) \quad \text{per } y \in (0,6).$$

Quindi l'equazione ⊛ diventa

$$\frac{1}{6}\left(\ln\left(\frac{y}{6-y}\right)+c_1\right)=\frac{1}{6}(\ln t+c_2) \qquad (\text{si ricordi che } t\in(0,+\infty))$$

cioè $\ln\left(\frac{y}{6-y}\right)=\ln t+c$ (ove $c=c_2-c_1$)

Imponendo la cond. di Cauchy: $\ln\left(\frac{3}{6-3}\right)=\ln 1+c$ trovo $c=0$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy in forma implicita è

$$\frac{y}{6-y}=t$$

e, risolvendo rispetto a y: $y=6t-yt \Rightarrow \boxed{y(t)=\frac{6t}{1+t}}$ sol. in forma esplicita.

7. L'equazione matriciale $\begin{pmatrix}1&k\\k&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&k\end{pmatrix}$ si può riscrivere, identificando le componenti di ugual posto: $\begin{cases}x+kz=1\\kx+z=1\\y+kw=1\\ky+w=k\end{cases}$ cioè come un sistema lineare di 4 equaz. in 4 incognite ... anzi in realtà come 2 sistemi di 2 equazioni in 2 incognite con la stessa matrice dei coefficienti $\begin{pmatrix}1&k\\k&1\end{pmatrix}$.

Quindi, se questa matrice è invertibile, cioè $\boxed{\text{se } 1-k^2\neq 0}$ ciascuno dei 2 sistemi non solo è risolubile ma addirittura ammette soluzione unica

$$\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&k\\k&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\1&k\end{pmatrix}=\frac{1}{1-k^2}\begin{pmatrix}1&-k\\-k&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&k\end{pmatrix}=\frac{1}{1-k^2}\begin{pmatrix}1-k&1-k^2\\1-k&0\end{pmatrix}$$

Se invece $\boxed{k=1}$

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

palesemente l'equazione è risolubile (basta prendere la matrice identica!) ma la sol. non è unica: infatti ciascuno dei 2 sistemi di cui sopra si riduce a 1 sola eq. $\begin{cases}x+z=1\\y+w=1\end{cases}$ e quindi ci sono ∞^2 soluzioni della forma:

$$\begin{pmatrix}1-z&y\\z&1-y\end{pmatrix}.$$

Infine, se $k=-1$ l'equazione non è risolubile poiché le due equazioni $\begin{cases}x-z=1\\-x+z=1\end{cases}$ che formano il primo sistema non sono compatibili

8. Il numero complesso $z=\frac{\sqrt{3}-i}{-1-i}$ può essere riportato a forma algebrica moltiplicando numeratore e denominatore per $\overline{(-1-i)}=-1+i$:

$$z=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)(-1+i)=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

Per determinarne il modulo conviene osservare che $|z|=\frac{|\sqrt{3}-i|}{|-1-i|}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

e per determinarne un argomento conviene osservare che

$$\arg z=\arg(\sqrt{3}-i)-\arg(-1-i)=-\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{7\pi}{12}.$$

Questo argomento è compreso nell'intervallo $(-\pi,\pi]$ e quindi è l'argomento principale di z.