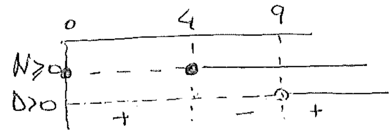
Istituzioni di Matematica FSX − 16/7/2014

1\. a) la funzione $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-2x}{4(\sqrt{x}-3)}$ è definita purché $\begin{cases} x\geq 0 \\ \sqrt{x}\neq 3\end{cases}$

cioè in $[0,9)\cup(9,+\infty)$. I suoi zeri sono le soluzioni di $x\sqrt{x}-2x=0$ cioè $x(\sqrt{x}-2)=0$ cioè $x=0$ e $x=4$. Inoltre $f(x)>0 \Leftrightarrow$ numeratore e denominatore sono concordi, cioè:



$f(x)>0$ in $(0,4)$ e in $(9,+\infty)$

$f(x)<0$ in $(4,9)$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)=0$

b) $\lim_{x\to 9^\pm} f(x) = \lim_{x\to 9^\pm} \dfrac{9}{4(\sqrt{x}-3)} = \pm\infty \Rightarrow x=9$ asintoto verticale.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} = +\infty$. È evidente che $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{4}$, ma

$\lim_{x\to+\infty} f(x)-\dfrac{1}{4}x = \dfrac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}-2x-x\sqrt{x}+3x}{\sqrt{x}-3} = \dfrac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x}} = +\infty$

quindi $f(x)$ non ha asintoto obliquo per $x\to+\infty$

c) $f'(x)=\dfrac{1}{4}\,\dfrac{\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}-2\right)(\sqrt{x}-3)-\frac{1}{2\sqrt{x}}(x\sqrt{x}-2x)}{(\sqrt{x}-3)^2} = \dfrac{1}{4(\sqrt{x}-3)^2}\left(\dfrac{3}{2}x-\dfrac{13}{2}\sqrt{x}+6-\dfrac{1}{2}x+\sqrt{x}\right)=$

$=\dfrac{1}{4(\sqrt{x}-3)^2}\left(x-\dfrac{11}{2}\sqrt{x}+6\right)$

La funzione derivata è definita in $(0,9)\cup(9,+\infty)$: in $x=0$ non può essere definita poiché la funzione non è definita su un intorno $(-k,k)$, con $k>0$, di $x=0$.

Però esiste la derivata destra che può essere calcolata o direttamente come $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{h}-2}{4(\sqrt{h}-3)} = \dfrac{1}{6}$ o come

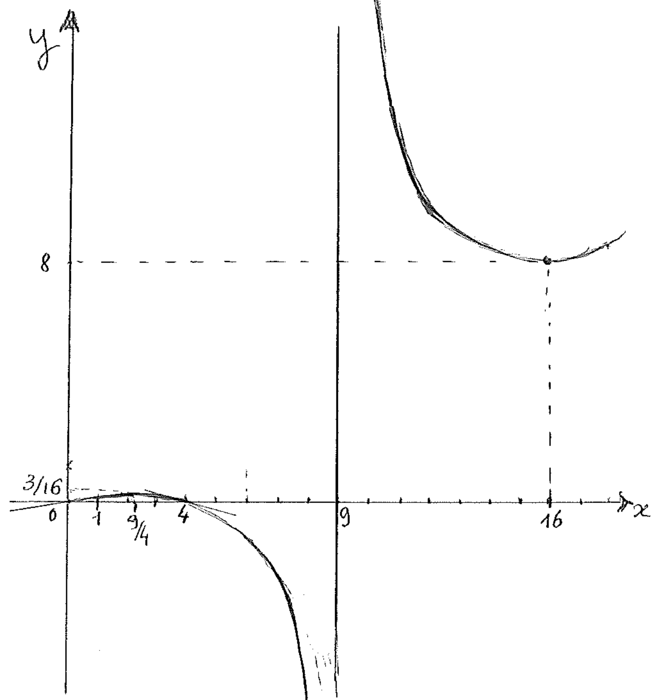
$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \dfrac{1}{4\cdot 9}\cdot 6 = \dfrac{1}{6}$.

d) L'equazione della retta tangente al grafico in $(0,0)$ è $y=\frac{1}{6}x$ per quanto appena detto.

Invece quella della tangente in $(4,0)$ è

$y=-\frac{1}{4}(x-4)$, cioè $y=-\frac{1}{4}x+1$,

poiché $f'(4)=\frac{1}{4}(4-11+6)=-\frac{1}{4}$.



e) $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{11}{2}\sqrt{x}+6\geq 0 \\ x\in(0,9)\cup(9,+\infty)\end{cases}$

e dato che $2x-11\sqrt{x}+12=0$

ha soluz. $\sqrt{x}=\dfrac{11\pm\sqrt{121-96}}{4}=\dfrac{11\pm 5}{4}= 4,\ \dfrac{3}{2}$

ciò significa:

$f'>0$ in $\left(0,\frac{9}{4}\right)$ e in $(16,+\infty)$, intervalli su cui $f(x)$ è crescente

$f'<0$ in $\left(\frac{9}{4},9\right)$ e in $(9,16)$ intervalli su cui $f(x)$ è decrescente

$x=\frac{9}{4}$ MAX RELATIVO: $f(9/4)=\dfrac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4}}{4\cdot(-3/2)}=\dfrac{3}{16}$

$x=16$ MIN REL.: $f(16)=\dfrac{2\cdot 16}{4\cdot 1}=8$

2. $\int x \ln(1+5x)\,dx = \boxed{\text{per parti coeff. } \ln(1+5x)} = \frac{x^2}{2}\ln(1+5x) - \frac{1}{2}\int \frac{5x^2}{5x+1}\,dx \overset{*}{=}$

ricordo che
$$\begin{array}{l|l} 5x^2 & 5x+1 \\ \hline -5x^2-x & x-\frac{1}{5} \\ \quad -x & \\ \quad x+\frac{1}{5} & \\ \quad \frac{1}{5} & \end{array}$$

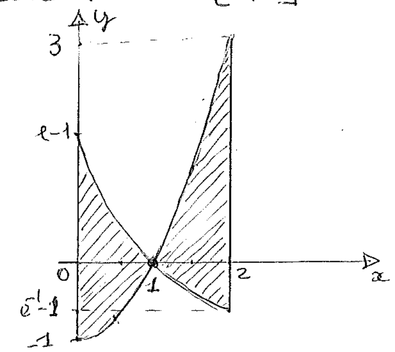
$= \frac{x^2}{2}\ln(1+5x) - \frac{1}{2}\int\left(x-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5x+1}\right)dx \overset{*}{=}$ osservo che la funz. assegnata è definita in $(-\frac{1}{5},+\infty)$

$= \frac{x^2}{2}\ln(1+5x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{10}x - \frac{1}{50}\ln(1+5x) + c$

Queste primitive sono tutte definite in $(-\frac{1}{5},+\infty)$ perché su tale intervallo l'integrando è anche continua.
Esse in $x=\frac{1}{5}$ valgono $\frac{1}{50}\cancel{\ln 2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{25} + \frac{1}{50} - \frac{1}{50}\cancel{\ln 2} + c = \frac{1}{100}+c$ e quindi tra di esse la primitiva che in $x=\frac{1}{5}$ vale 0 è

$$\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{50}\right)\ln(1+5x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{10}x - \frac{1}{100}.$$

3. La funzione $f(x)=e^{1-x}-1$ ha grafico ottenuto traslando di 1 in direzione e verso dell'asse x e di -1 in direzione e verso dell'asse y il grafico dell'esponenziale decrescente e^{-x} e quindi è decrescente in $[0,2]=I$.
Inoltre $f(0)=e-1$, $f(1)=0$, $f(2)=e^{-1}-1$
La funzione $g(x)=x^2-1$ ha grafico ottenuto traslando di -1 in direzione e verso dell'asse y il grafico di x^2: quindi in I è crescente e $g(0)=-1$, $g(1)=0$, $g(2)=3$



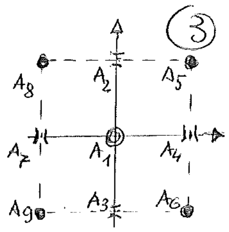
I due grafici si intersecano in $(1,0)$ e si ha
$f(x)\geq 0 \geq g(x)$ in $[0,1]$
$f(x)\leq 0 \leq g(x)$ in $[1,2]$
Quindi l'area della regione delimitata dai 2 grafici e da $x=0$, $x=2$ è data da
$$\int_0^1 (f(x)-g(x))\,dx + \int_1^2 (g(x)-f(x))\,dx.$$
Ora: $\int (f(x)-g(x))\,dx = \int (e^{1-x}-x^2)\,dx = -e^{1-x}-\frac{x^3}{3}+c$
$\Rightarrow$ Area $= \left[-e^{1-x}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[e^{1-x}+\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = -1-\frac{1}{3}+e+e^{-1}+\frac{8}{3}-1-\frac{1}{3} = e+e^{-1}.$

4. La funzione $f(t)=\frac{1}{2+\sin(1+3t)}$ è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$ poiché il denom. $2+\sin(1+3t)$ è $\geq 2-1=1 \gneq 0$ su tutto $\mathbb{R}$. Per lo stesso motivo è positiva su tutto $\mathbb{R}$ e quindi si possono applicare i criteri di convergenza all'integrale improprio di I specie $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.
In particolare si vede che, essendo $|\operatorname{sen}(1+3t)|\leq 1$, $1\leq 2+\operatorname{sen}(1+3t)\leq 3$ e quindi $\frac{1}{3}\leq f(t)\leq 1$. Poiché $\int_0^{+\infty}\frac{1}{3}\,dt=+\infty$, per il criterio del confronto mediante disequazioni, anche $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt=+\infty$, cioè <u>diverge</u>.

5. $f(x)=x^4+y^4-2x^2-2y^2$, essendo un polinomio, è definita e continua, con derivate parziali prime e seconde (che sono ancora polinomi) definite e continue su tutto $\mathbb{R}^2$. Quindi per individuare e studiare i punti critici si possono usare rispettivamente gradiente ed hessiano

$f_x = 4x^3 - 4x$, $f_y = 4y^3 - 4y$ $\Rightarrow$ $\text{grad} f = (0,0) \iff \begin{cases} x(x-1)(x+1) = 0 \\ y(y-1)(y+1) = 0 \end{cases}$

cioè ci sono 9 punti critici $A_1 = (0,0)$, $A_2 = (0,1)$, $A_3 = (0,-1)$
$A_4 = (1,0)$, $A_5 = (1,1)$, $A_6 = (1,-1)$
$A_7 = (-1,0)$, $A_8 = (-1,1)$, $A_9 = (-1,-1)$



$f_{xx} = 4(3x^2-1)$ $\quad f_{xy} = 0 = f_{yx}$ $\quad f_{yy} = 4(3y^2-1)$ $\Rightarrow H_f = 16(3x^2-1)(3y^2-1)$

$\Rightarrow H_f(A_1) = 16(-1)(-1) > 0 \Rightarrow A_1$ estremante locale: precisamente MAX, poiché $f_{xx} < 0$

$H_f(A_2) = H_f(A_3) = H_f(A_4) = H_f(A_7) = 16\,(3-1)\cdot(-1) < 0 \Rightarrow A_2, A_3, A_4, A_7$ sono punti di sella

$H_f(A_5) = H_f(A_6) = H_f(A_8) = H_f(A_9) = 16\,(3-1)(3-1) > 0 \Rightarrow A_5, A_6, A_8, A_9$ MIN. locali poiché $f_{xx} = 2 > 0$.

6. $y'' + 2y' = 3t+1$ è un'eq. diff lineare non omogenea del 2° ordine a coefficienti costanti. L'omogenea associata $z'' + 2z' = 0$ ha eq. caratteristica $r^2 + 2r = 0$ che ha soluzioni $r_1 = 0$ e $r_2 = -2$ $\Rightarrow$ l'omogenea associata ha integrale generale

$$z(t) = c_1 e^{0\cdot t} + c_2 e^{-2t}$$

una soluzione della completa è un polinomio di secondo grado $at^2+bt+c = \bar{y}(t)$ (poiché nell'eq. diff. il coefficiente di y è ZERO).

$\bar{y}'(t) = 2at + b$, $\bar{y}''(t) = 2a$ $\Rightarrow$ $2a + 4at + 2b \equiv 3t+1$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ se e solo se $(4a-3)t + (2a+2b-1) \equiv 0$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ se e solo se

$\begin{cases} 4a-3 = 0 \\ 2a+2b-1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3/4 \\ b = -1/4 \end{cases}$ c può avere qualunque valore; per comodità: $c = 0$

Quindi una sol. particolare della completa è $\bar{y}(t) = \frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{4}t$.
Ne segue che l'integrale generale della completa è $y(t) = \frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{4}t + c_1 + c_2 e^{-2t}$
Si ha $y'(t) = \frac{3}{2}t - \frac{1}{4} - 2c_2 e^{-2t}$. Quindi se deve valere $y(0) = 3$ e $y'(0) = \frac{7}{4}$ deve essere soddisfatto il sistema $\begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ -\frac{1}{4} - 2c_2 = \frac{7}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = -1 \end{cases}$

cioè la sol. del problema di Cauchy è $y(t) = \frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{4}t + 4 - e^{-2t}$.

7. Il sistema lineare $\begin{cases} x + (k-2)y + 3z = 1 \\ (k-1)x + 2y + 2kz = 0 \end{cases}$ ha matrice completa associata del tipo:

$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-2 & 3 & 1 \\ k-1 & 2 & 2k & 0 \end{array}\right)$; esso sarà risolubile se e solo se $rg\, A = rg(A|b)$.

osservo che (uso 1ª e 3ª colonna): $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ k-1 & 2k \end{vmatrix} = 2k - 3k + 3 = 3 - k \neq 0$ se $k \neq 3$

Quindi $\boxed{\text{se } k \neq 3}$, $rg\, A = 2$ e poiché $rg(A|b) \leq$ numero di righe $= 2$ si ha certamente $rg\, A = rg(A|b)$ cioè il sistema è risolubile.

Se $\boxed{k = 3}$ $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right)$ e quindi $rg\, A = 1$ poiché presenta 1 sola colonna indipendente, mentre $rg(A|b) = 2$ poiché $\binom{1}{0}$ non è multiplo di $\binom{1}{2}$ $\Rightarrow$ il sistema non è risolubile

Se $k = 1$ il sistema diventa $\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y + z = 0 \\ x + 4z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

Quindi il sistema ha soluzioni della forma $\{(1-4t, -t, t),\ t \in \mathbb{R}\}$.

8. $z = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} i$ ha modulo: $\frac{1}{4}\sqrt{5+1-2\sqrt{5}+10+2\sqrt{5}} = 1$. Quindi, dato che $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$,

$\boxed{z^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} i}$. Invece $z^2 = \frac{1}{16}\left((6-2\sqrt{5}-10-2\sqrt{5}) + 2(\sqrt{5}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}} \cdot i\right) =$

$= -\frac{1+\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{5}-1}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\, i$ e $z^4 = (z^2)^2 = \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{16} - \frac{6-2\sqrt{5}}{64}(10+2\sqrt{5})\right) - 2\,\frac{5-1}{32}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\, i =$

$= \frac{6+2\sqrt{5}+(\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}+5)}{16} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} i = \frac{6-10+4\sqrt{5}}{16} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} i = z^{-1}$. Dunque $z^5 = z^4 \cdot z = z^{-1} \cdot z = 1$, cioè z è una radice quinta di 1.