*Cognome*____________________________*Nome*________________________*matr.*_________

*Intendo sostenere l'**orale** nel periodo* (spuntare il periodo che interessa. L'esame può essere al pomeriggio, ma non nel week-end):
☐ ***22 – 26 giugno*** ☐ ***29 giugno – 6 luglio*** ☐ ***8 – 17 luglio*** ☐ ***20 – 31 luglio***
con l'esclusione dei seguenti giorni: ……………………………………………………………………
Se il voto è < …… intendo sostenere la prova del ☐ 7/7 ☐ 28/7 (spuntare la data che interessa)
indirizzo e-mail:

Consegnare solo questo foglio: esso deve contenere oltre ai risultati anche lo svolgimento e le opportune giustificazioni. *Ogni quesito vale 7 punti.*

Matematica del Discreto per Informatica

18 giugno 2015

1. Il numero intero K = 837526 appartiene a una classe di resto modulo 11.
   a) Determinare a quale classe $[r]_{11}$, con $r \in \{0,1,\ldots,10\}$, appartiene K.
   b) Risolvere il sistema di congruenze lineari $\begin{cases} x \equiv 3 \mod 15 \\ x \equiv r \mod 16 \end{cases}$

Risposte:	a) $r =$ ……	b) $x =$ …………..

Elaborato:

2. Nel gruppo $O_2(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate P di ordine 2 ortogonali (cioè tali che $PP^T=I$) in cui il prodotto è l'ordinario prodotto righe per colonne, considerare il sottoinsieme S delle matrici diagonali.

   a) Mostrare che S è un sottogruppo di $O_2(\mathbb{R})$.
   b) Elencare gli elementi di S.
   c) $Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ è una matrice di $O_2(\mathbb{R})$. Mostrare che, se $P \in S$ ma $P \neq \pm I$, la matrice $Q^{-1}PQ$ non appartiene a S. Il sottogruppo S è normale in $O_2(\mathbb{R})$?

Risposte (cancellare l'affermazione sbagliata):

b)	c) $(S,\cdot)$ è / non è un sottogruppo normale di $O_2(\mathbb{R})$

Elaborato:

3. Nell'insieme delle applicazioni dell'insieme $S = \{a, b, c\}$ in sé considerare la relazione $\mathcal{R}$ così definita

$$\text{date } f, g \in S^S \quad \text{dico che} \quad f \;\mathcal{R}\; g \quad \text{se e solo se} \quad f(a) = g(a).$$

   a) Mostrare che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza.
   b) Dire quante sono le classi di equivalenza.
   c) Descrivere (ad es. elencandone gli elementi) le classi di equivalenza; in particolare dire se hanno tutte lo stesso ordine (= numero di elementi).

Risposte:	b) numero classi di equivalenza:	c) ordine delle classi di equivalenza:

Elaborato:

4. Nello spazio vettoriale V = Mat$_{2\times2}(\mathbb{R})$ considerare i due sottospazi: $U = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ generato dai vettori $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in V,\ \begin{cases} 3z - w = 0 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases} \right\}$.

a) Determinare una base di W.
b) Completare la base assegnata di U a una base di $U + W$.
c) Determinare la dimensione di $U \cap W$.

Risposte:

a) base di W: $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$,	b) base di $U + W$: $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$,	c) dim $U \cap W =$

Elaborato:

5. In $\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ è data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Trovare gli autovalori e i corrispondenti autospazi di A.

b) Trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di A.

Risposte:

a) $\lambda_1 =$	b) $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

Elaborato: