*Cognome*____________________________*Nome*_______________________*matr.*________

*Intendo sostenere l'**orale** nel periodo* (spuntare il periodo che interessa. L'esame può essere al pomeriggio, ma non nel week-end):
☐ ***22 – 26 giugno*** ☐ ***29 giugno – 6 luglio*** ☐ ***8 – 17 luglio*** ☐ ***20 – 31 luglio***
con l'esclusione dei seguenti giorni: ....
Se il voto è < ...... intendo sostenere la prova del ☐ 7/7 ☐ 28/7 (spuntare la data che interessa)
indirizzo e-mail:

Consegnare solo questo foglio: esso deve contenere oltre ai risultati anche lo svolgimento e le opportune giustificazioni. *Ogni quesito vale 7 punti.*

Matematica del Discreto per Informatica

18 giugno 2015

1. Il numero intero K = 837526 appartiene a una classe di resto modulo 11.
   a) Determinare a quale classe $[r]_{11}$, con $r \in \{0,1,\dots,10\}$, appartiene K.
   b) Risolvere il sistema di congruenze lineari $\begin{cases} x \equiv 3 \mod 15 \\ x \equiv r \mod 16 \end{cases}$

Risposte:	a) $r = \dots 8 \dots$	b) $x = 168 + 240t,\ t \in \mathbb{Z}$

Elaborato:

a) Cerco il resto nella divisione di $K = 837526$ per 11.
Ricordando che $10^{2h} \equiv_{11} 1$, $10^{2h+1} \equiv_{11} -1$ ($\forall h$ intero ≥ 0) si ha

$K \equiv_{11} -8+3-7+5-2+6 = -3 \equiv_{11} 8$. Quindi $r = 8$.

OPPURE

$$\begin{array}{l|l} 837526 & 11 \\ \hline 67 & 76138 \\ \ \ 15 & \\ \ \ \ 42 & \\ \ \ \ \ 96 & \\ \ \ \ \ \ 8 & \end{array}$$

$\boxed{\text{Resto}: 8}$ $\Longrightarrow k \in [8]_{11}$

b) Osservo che $MCD(15,16) = 1$ poiché 15 e 16 sono consecutivi. Quindi si può applicare il teorema cinese del resto: il sistema di congruenze lineari ha soluzione e, se c è una di esse, tutte e sole le altre hanno la forma $x = c + 15 \cdot 16 h$, $h \in \mathbb{Z}$.
Cerco c risolvendo due congruenze lineari ausiliarie:

$16 y_1 \equiv 1 \mod 15 \iff y_1 \equiv 1 \mod 15$ (poiché $16 \equiv_{15} 1$)
$15 y_2 \equiv 1 \mod 16 \iff -y_2 \equiv 1 \mod 16$ (poiché $15 \equiv_{16} -1$) $\iff y_2 \equiv -1 \mod 16$
Allora una soluzione del sistema di congruenze lineari $\begin{cases} x \equiv 3 \mod 15 \\ x \equiv 8 \mod 16 \end{cases}$
è $c = (1) \cdot 16 \cdot 3 + (-1) \cdot 15 \cdot 8 = 48 - 120 = -72$
e quindi le soluzioni hanno la forma $x = -72 + 240h$, $h \in \mathbb{Z}$ o anche
$x = 168 + 240t$, $t \in \mathbb{Z}$

2. Nel gruppo $O_2(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate P di ordine 2 ortogonali (cioè tali che $PP^T=I$) in cui il prodotto è l'ordinario prodotto righe per colonne, considerare il sottoinsieme S delle matrici diagonali.

a) Mostrare che S è un sottogruppo di $O_2(\mathbb{R})$.
b) Elencare gli elementi di S.
c) $Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ è una matrice di $O_2(\mathbb{R})$. Mostrare che, se $P \in S$ ma $P \neq \pm I$, la matrice $Q^{-1}PQ$ non appartiene a S. Il sottogruppo S è normale in $O_2(\mathbb{R})$?

Risposte (cancellare l'affermazione sbagliata):

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	c) $(S,\cdot)$ ~~è~~ non è un sottogruppo normale di $O_2(\mathbb{R})$

Elaborato:

a) Nelle matrici ortogonali di ordine 2 il sottoinsieme S delle matrici diagonali costituisce un sottogruppo perché:
i) non è vuoto, contenendo almeno la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ che è ortogonale e diagonale
ii) il prodotto di due matrici diagonali $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ 0 & bb' \end{pmatrix}$ è ancora diagonale (e se le due matrici sono ortogonali il prodotto è ortogonale)
iii) l'inversa di una matrice diagonale $\underset{(ab\neq 0)}{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}}$ è $\begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{pmatrix}$ che è ancora diagonale (e se la prima è ortogonale lo è anche la sua inversa.

b) Poiché deve essere $P = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ e $PP^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ cioè $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ l'ins. S è formato dalle matrici con $a=\pm 1$, $b = \pm 1$, cioè
$S = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$

c) Notiamo che le 4 matrici di S sono di due tipi: $\pm I$ e $\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Facciamo la verifica con $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$(*). Poiché Q è ortogonale (infatti $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = I$), $Q^{-1} = Q^T$

$\Rightarrow Q^{-1}PQ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3-1 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

è ortogonale ma non diagonale! Quindi S non è normale in $O_2(\mathbb{R})$, poiché, se lo fosse, $\forall P \in S$ e $\forall Q \in O_2(\mathbb{R})$ si avrebbe $Q^{-1}PQ \in S$. (*) la verifica con $-P$ differisce solo per un prodotto per -1.

3. Nell'insieme delle applicazioni dell'insieme $S = \{a, b, c\}$ in sé considerare la relazione $\mathcal{R}$ così definita

date $f, g \in S^S$ dico che $f\ \mathcal{R}\ g$ se e solo se $f(a) = g(a)$.

a) Mostrare che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza.
b) Dire quante sono le classi di equivalenza.
c) Descrivere (ad es. elencandone gli elementi) le classi di equivalenza; in particolare dire se hanno tutte lo stesso ordine (= numero di elementi).

Risposte:	b) numero classi di equivalenza: 3	c) ordine delle classi di equivalenza: 9

Elaborato:

a) $\mathcal{R}$ è riflessiva poiché $\forall f \in S^S$ si ha $f(a)=f(a)$ cioè $f\mathcal{R}f$
$\mathcal{R}$ è simmetrica poiché $\forall f,g \in S^S$ se $f\mathcal{R}g$ cioè $f(a)=g(a)$ anche $g(a)=f(a)$ cioè $g\mathcal{R}f$
$\mathcal{R}$ è transitiva poiché $\forall f,g,h \in S^S$, se $f\mathcal{R}g$ cioè $f(a)=g(a)$ e $g\mathcal{R}h$ cioè $g(a)=h(a)$, per la transitività dell'uguaglianza in S si ha $f(a)=h(a)$ cioè $f\mathcal{R}h$.
Valendo le 3 proprietà $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza.

b) Le classi di equivalenza sono 3: $C_a = \{f \in S^S \mid f(a) = a\}$, $C_b = \{f \in S^S \mid f(a) = b\}$, $C_c = \{f \in S^S \mid f(a) = c\}$.

c) Ognuna di esse ha $3 \times 3 = 9$ elementi poiché fissato il corrispondente di a, sono possibili tre scelte per i corrispondenti di b e 3 scelte (indipendenti dalle precedenti) per i corrispondenti di c. Ad esempio:

$$C_a = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & a \end{pmatrix}}_{f(b)=b}, \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & a & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & a & b \end{pmatrix}}_{f(b)=a}, \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}}_{f(b)=c} \Big\}$$

4. Nello spazio vettoriale $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ considerare i due sottospazi: $U = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ generato dai vettori $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in V, \ \begin{cases} 3z - w = 0 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases} \right\}$.

a) Determinare una base di W.
b) Completare la base assegnata di U a una base di $U + W$.
c) Determinare la dimensione di $U \cap W$.

Risposte:

a) base di W: $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	b) base di $U + W$: $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\underline{w}_1$	c) dim $U \cap W = 1$

Elaborato:

a) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R}), \ \begin{cases} 3z - w = 0 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases} \right\}$: risolvendo il sistema, ad es. ricavando $\begin{cases} w = 3z \\ y = x - 3z \end{cases}$ si vede che le matrici appartenenti a W hanno la forma $\begin{pmatrix} x & x-3z \\ z & 3z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Dette $\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ si vede che sono linearmente indipendenti (non sono proporzionali) e generano W: ne sono quindi una base

b) U ha base $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Evidentemente $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{w}_1, \underline{w}_2\}$ è un sistema di generatori di $U + W = \{\underline{u} + \underline{w}, \ \underline{u} \in U, \underline{w} \in W\}$: vediamo quanti di questi vett. sono lin. ind.

$\underline{w}_1 = a\underline{u}_1 + b\underline{u}_2 \iff \begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 2 = 1 \\ a \cdot (-1) + b \cdot 1 = 1 \\ a \cdot (0) + b(-1) = 0 \\ a \cdot 1 + b \cdot 1 = 0 \end{cases}$ le equazioni indicate dalla doppia freccia sono contraddittorie $\Rightarrow$ sistema impossibile $\Rightarrow \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{w}_1\}$ sono linearmente INDIPENDENTI.

$\underline{w}_2 = a\underline{u}_1 + b\underline{u}_2 + c\underline{w}_1 \iff \begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 2 + c \cdot 1 = 0 \\ a(-1) + b \cdot 1 + c \cdot 1 = -3 \\ a \cdot 0 + b(-1) + c \cdot 0 = 1 \\ a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 0 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 2 \\ -4 - 1 + 2 = -3 \text{ o.k.} \\ b = -1 \\ a = 4 \end{cases}$ sistema risolubile:

$\underline{w}_2 = 4\underline{u}_1 - \underline{u}_2 + 2\underline{w}_1$ dipende linearmente dagli altri 3 generatori. Una base di $U+W$ è quindi data da $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{w}_1\}$

c) per la formula di Grassmann $\dim U \cap W = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 2 + 2 - 3 = 1$.

5. In $\mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{R})$ è data la matrice $A=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&4&0\\2&0&3\end{pmatrix}$.

a) Trovare gli autovalori e i corrispondenti autospazi di A.

b) Trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di A.

Risposte:

a) $\lambda_1=-1$, $V_{-1}=\left\{\begin{pmatrix}-2h\\0\\h\end{pmatrix}, h\in\mathbb{R}\right\}$; $\lambda_2=4$, $V_4=\left\{\begin{pmatrix}k\\l\\2k\end{pmatrix}, l,k\in\mathbb{R}\right\}$	b) $\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix}-2/\sqrt5\\0\\1/\sqrt5\end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt5\\0\\2/\sqrt5\end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

Elaborato:

a) $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}0-\lambda&0&2\\0&4-\lambda&0\\2&0&3-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)[-\lambda(3-\lambda)-4]=(4-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-4)=(4-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-4)$ è il polinomio caratteristico di A

Quindi la matrice A ha 2 autovalori: $\lambda_1=-1$ con molteplicità algebrica 1 e $\lambda_2=4$ con molteplicità algebrica 2; in ogni caso, dato che la matrice A è simmetrica, è diagonalizzabile (quindi l'autospazio relativo a 4 avrà dimensione 2).

Autospazi

$\lambda_1=-1$ $\quad \begin{pmatrix}1&0&2\\0&5&0\\ \cancel{2}&\cancel{0}&\cancel{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x+2z=0\\5y=0\end{cases} \Rightarrow V_{-1}=\left\{\begin{pmatrix}-2h\\0\\h\end{pmatrix}, h\in\mathbb{R}\right\}$

$\lambda_2=4$ $\quad \begin{pmatrix}-4&0&2\\ \cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow 2x-z=0 \Rightarrow V_4=\left\{\begin{pmatrix}k\\l\\2k\end{pmatrix}, k\in\mathbb{R}\right\}$

b) V_{-1} ha una base formata dal solo autovettore $\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

V_4 ha una base formata da due autovettori, ad esempio: $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

$\left\{\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ è una base di autovettori di A: il primo è certamente ortogonale agli altri 2 poiché relativo ad autovalore diverso; quelli della base di V_4 lo sono perché siamo fortunati(*). Per trovare una base ortonormale di autovettori basta allora dividere ciascun vettore della base per la sua norma:

$\left\|\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{4+0+1}=\sqrt5=\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right\|$; $\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|=1 \Rightarrow$ base ortonormale $\left\{\begin{pmatrix}-2/\sqrt5\\0\\1/\sqrt5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/\sqrt5\\0\\2/\sqrt5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

Rispetto a questa base, così ordinata, la matrice rappresentativa dell'appl. lin $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ diventa $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$.

(*) Ricordo che i due vettori sono ortogonali se $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\left[=_{DF} 1\cdot0+0\cdot1+2\cdot0\right]=0$.

Similmente $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}=0$ e $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}=0$.