*Cognome*____________________________*Nome*________________________*matr.*_________

*Intendo sostenere l'**orale** nel periodo* (spuntare il periodo che interessa. L'esame può essere al pomeriggio, ma non nel week-end):
☐ ***10 – 17luglio*** ☐ ***20 – 31 luglio***
con l'esclusione dei seguenti giorni: ..........................................................................................
indirizzo e-mail:

**Consegnare solo questo foglio: esso deve contenere oltre ai risultati anche lo svolgimento e le opportune giustificazioni.** *Ogni quesito vale 7 punti.*

## Matematica del Discreto per Informatica

7 luglio 2015

1. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ la corrispondenza $f_k\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1+k & 1 & 3 & -2 \\ 0 & k & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ definisce un'applicazione lineare $f_k \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$.

   a) Stabilire per quali valori di $k$ il vettore $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartiene all'immagine di $f_k$.

   b) Posto $k = 0$, determinare tutti i vettori $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^4$ che sono controimmagini di $\mathbf{w}$.

| *Risposte:* | a) $k \neq 1$ | b) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1+h \\ -3+h \\ 2/3 \\ h \end{pmatrix}$, $h \in \mathbb{R}$ |
|---|---|---|

*Elaborato:*

a) $\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Im} f_k$ se esiste un vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^4$ tale che $f_k(\underline{v}) = \underline{w}$, cioè se è risolubile il sistema lineare: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1+k & 1 & 3 & -2 \\ 0 & k & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, che denoterò brevemente con $A_k \underline{v} = \underline{w}$.

Trasformiamo la matrice completa del sistema $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1+k & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & k & 3 & 0 & 2 \end{array}\right)$ con il metodo di eliminazione di GAUSS:

$$(A_k | \underline{w}) \xrightarrow[R_2-(1+k)R_1]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2+1+k & -1-k \\ 0 & k & 3 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-kR_2]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & k-1 & -1-k \\ 0 & 0 & 3-3k & -k(k-1) & 2+k+k^2 \end{array}\right)$$

L'ultima riga ha sicuramente almeno un elemento diverso da zero nelle prime 4 entrate (corrispondenti ai coefficienti delle incognite del sistema) se $k \neq 1$. Invece se $k = 1$ l'ultima riga diventa $(0\ 0\ 0\ 0 | 2)$ e quindi nel sistema compare un'eq. impossibile $\Rightarrow$ sistema non risolubile $\Rightarrow$ non esiste $\underline{v}$ t.c. $f(\underline{v}) = \underline{w}$. In tutti gli altri casi l'ultima equazione è risolubile: $z = \frac{2+k+k^2}{3-3k} + \frac{k}{3} w$ e, per sostituzione, anche le altre lo sono e quindi esistono (per ogni $k \neq 1$ infinite) controimmagini di $\underline{w}$, cioè $\underline{w} \in \operatorname{Im} f_k$.

b) Se $k = 0$ trovare le controimmagini di $\underline{w}$ significa proprio risolvere il suddetto sistema. Possiamo tenere validi i passaggi già fatti, per cui si tratta di partire da

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{3}R_3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2-3R_3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 1+k \\ y = -3+h \quad h \in \mathbb{R} \\ z = 2/3 \\ w = h \end{cases}$$

cioè le controimmagini di $\underline{w}$ sono i $\underline{v}$ della forma $\begin{pmatrix} 1+h \\ -3+h \\ 2/3 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h \in \mathbb{R}$.

2. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ considerare il sottospazio $U = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ generato dai vettori $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e il sottospazio $W$ dei vettori $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in V$ tali che $\begin{cases} x - 2z + w = 0 \\ x - 2y - w = 0 \end{cases}$.

a) Determinare una base di $U \cap W$.

b) Completare tale base a una base di $V$.

*Risposte:*

| | |
|---|---|
| a) base di $U \cap W$: $= \{ \underline{u}_1, \underline{u}_2 \}$, | b) base di $V$: $= \{ \underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{e}_1, \underline{e}_2 \}$ |

*Elaborato:*

a) i vettori di $U$ hanno la forma $a\underline{u}_1 + b\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} a+3b \\ b \\ a+2b \\ a+b \end{pmatrix}$ al variare di $a, b$ in $\mathbb{R}$. Un vettore di questo tipo sta anche in $W$ (cioè è un vettore di $U \cap W$) se e solo se le sue componenti soddisfano il sistema lineare che definisce $W$ cioè se e solo se

$$\begin{cases} (a+3b) - 2(a+2b) + (a+b) = 0 \\ (a+3b) - 2b - (a+b) = 0 \end{cases}$$

Ora si vede subito che le due espressioni sono identicamente nulle (cioè valgono 0 per ogni valore reale di $a$ e di $b$)

Ciò significa che tutti i vettori di $U$ sono anche vettori di $W$, cioè $U \cap W = U$, per cui una base di $U$ è $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$.

b) Poiché $V$ ha dimensione 4, per completare $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ a una base di $V$ bisogna trovare altri 2 vettori indipendenti tra loro e da questi. Ampliamo il sistema di generatori aggiungendo i vettori della base canonica: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

I primi due sono indipendenti come dato del problema. Il terzo non dipende da essi poiché $a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ implicherebbe $b = 0$ ma $\underline{e}_1$ non è multiplo di $\underline{u}_1$. Il quarto è indipendente dai primi 3: possiamo ancora mostrare che non esistono $a, b, c$ t.c. $a\underline{u}_1 + b\underline{u}_2 + c\underline{e}_1 = \underline{e}_2$ oppure ricordare che 4 vettori di $\mathbb{R}^4$ sono lin. indip. se e solo se il determinante della matrice ottenuta accostandoli è $\neq 0$. In questo caso il calcolo è semplicissimo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Abbiamo così mostrato che $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ sono indipendenti ed, appartenendo a uno sp. vett. di dimensione 4, questo basta a garantire che sono una base di $V$.

3. Nell'insieme $X = \mathbb{N}^2$ considerare la relazione d'ordine $\leq_X$ così definita: dati $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in X$,

$$(a_1, a_2) \leq_X (b_1, b_2) \text{ se e solo se: } a_1 + a_2 < b_1 + b_2 \text{ oppure } a_1 + a_2 = b_1 + b_2 \text{ e } a_2 \leq b_2.$$

a) Dimostrare che la relazione $\leq_X$ è antisimmetrica (NON su esempi e senza sfruttare il dato che è una relazione d'ordine!).

b) Stabilire quale tra i due elementi $a = (1,4)$ e $b = (2,3)$ di $X$ è il maggiore e quale è il minore tra $b$ e $c = (3,1)$

c) Determinare l'estremo inferiore tra $a$ e $c$.

*Risposte*

| | |
|---|---|
| b) $a$ è maggiore di $b$ ; $c$ è minore di $b$ | c) $\inf(a,c) = c$ |

*Elaborato:*

a) Dobbiamo provare che se $\underbrace{(a_1,a_2)\le_x(b_1,b_2) \text{ e } (b_1,b_2)\le_x(a_1,a_2)}$ allora $(a_1,a_2)=(b_1,b_2)$.

Osservo che in $\boxed{\text{queste}}$ ipotesi non può essere $a_1+a_2 \lneq b_1+b_2$ altrimenti non potrebbe essere $b_1+b_2 \lneq a_1+a_2$. Quindi si avrà $a_1+a_2=b_1+b_2$. Allora la 1ª disuguaglianza dice che $a_2\le b_2$, la seconda che $b_2\le a_2$ e quindi $a_2=b_2$ (poiché la relazione $\le$ in $\mathbb{N}$ è antisimmetrica). Dato che $a_1+a_2=b_1+b_2$, questo implica che anche $a_1=b_1$ e quindi $(a_1,a_2)=(b_1,b_2)$

b) $a=(1,4)$, $b=(2,3)$: in questo caso si ha $1+4=2+3$ e dato che $4>3$ risulta $\boxed{a\ge_x b}$. Invece $c=(3,1)$ ha somma degli elementi $<5$, quindi $\boxed{c\le_x b}$

c) poiché $c\le_x b\le_x a$ (e vale la proprietà transitiva, per cui $c\le_x a$) si ha $\inf(a,c)=c$.

4. Sia $S$ il sottoinsieme degli *elementi invertibili* del monoide moltiplicativo $(\mathbb{Z}_{12},\cdot)$ delle classi di resto modulo 12, ove il prodotto è definito come al solito da $[r]_{12}\cdot[s]_{12}=[rs]_{12}$.
   a) Usando strumenti teorici, stabilire per quali $r\in\{0,1,2,\dots,11\}$ è risolubile la congruenza lineare $r\cdot x\equiv 1 \bmod 12$.
   b) Per ciascuno degli elementi di $S$ determinare l'inverso (moltiplicativo) in $\mathbb{Z}_{12}$.
   c) Mostrare che, rispetto al prodotto sopra definito, $S$ è un gruppo.

| *Risposte:* | a) $r\in\{1,5,7,11\}$ | b) $[1]_{12}^{-1}=[1]$, $[5]_{12}^{-1}=[5]_{12}$, $[7]_{12}^{-1}=[7]_{12}$, $[11]_{12}^{-1}=[11]_{12}$ |
|---|---|---|

*Elaborato:*

a) La congruenza lineare $rx\equiv 1 \bmod 12$ è risolubile se e solo se r è diverso da 0 e $MCD(r,12)$ divide 1 cioè $MCD(r,12)=1$. Quindi, scartando 0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10 che non sono primi con 12, restano 1, 5, 7, 11.

b) La parte (a) garantisce che per ciascuna delle classi $[1]_{12}$, $[5]_{12}$, $[7]_{12}$, $[11]_{12}$ esiste l'inverso poiché è risolubile l'equazione $[r]_{12}\cdot[x]_{12}=[1]_{12}$.

$1\cdot 1\equiv_{12} 1 \Rightarrow [1]_{12}^{-1}=[1]_{12}$

$5\cdot 5=25\equiv_{12} 1 \Rightarrow [5]_{12}^{-1}=[5]_{12}$

$7\cdot 7=49\equiv_{12} 1 \Rightarrow [7]_{12}^{-1}=[7]_{12}$

$11\cdot 11=121\equiv_{12} 1 \Rightarrow [11]_{12}^{-1}=[11]_{12}$

Se non si ha la prontezza di "vedere" che questi prodotti danno 1 mod 12 basta fare la tabella moltiplicativa:

| | [1] | [5] | [7] | [11] |
|---|---|---|---|---|
| [1] | [1] | [5] | [7] | [11] |
| [5] | [5] | [1] | [11] | [7] |
| [7] | [7] | [11] | [1] | [5] |
| [11] | [11] | [7] | [5] | [1] |

c) Dobbiamo mostrare che il prodotto è interno.
Si può farlo per via teorica: se $[r]_{12},[s]_{12}\in S$ cioè esistono $[r]_{12}^{-1},[s]_{12}^{-1}$, allora la classe $[s]_{12}^{-1}[r]_{12}^{-1}$ è l'inversa della classe $[r]_{12}\cdot[s]_{12}$, poiché nel monoide $(\mathbb{Z}_{12},\cdot)$ vale: $[s]_{12}^{-1}\cdot[r]_{12}^{-1}\cdot[r]_{12}\cdot[s]_{12}=[s]_{12}^{-1}\cdot[1]_{12}[s]_{12}=[s]_{12}^{-1}\cdot[s]_{12}=[1]_{12}$ e analogamente a destra.
Oppure si può scrivere la tabella moltiplicativa delle 4 classi e vedere che l'insieme è chiuso rispetto al prodotto.
Ora osserviamo che $\cdot$ è associativo in $(\mathbb{Z}_{12},\cdot)$ e che $[1]_{12}$ che è l'elem. neutro nel monoide sta in $S$ e che gli inversi rispetto a $\cdot$ sono elementi di $S$ (vedi (b)).
Dunque $(S,\cdot)$ è un gruppo

5. In $\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ è data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Determinare gli autovalori e i corrispondenti autospazi di $A$.

b) Stabilire se A è diagonalizzabile e in caso affermativo trovare una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di $A$.

*Risposte:*

| | |
|---|---|
| a) $\lambda_1 = 2$ , $V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ k \\ h \end{pmatrix}, h,k \in \mathbb{R} \right\}$, $\lambda_2 = 3$ , $V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \ell \\ \ell \end{pmatrix}, \ell \in \mathbb{R} \right\}$ ... | b) NO ☐ SÌ ☒ con base $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ |

*Elaborato:*

a) Equazione caratteristica $|A - \lambda I| = 0$ : $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$

$\Rightarrow$ autovalori di A : $\lambda_1 = 2$ con molteplicità algebrica 2, $\lambda_2 = 3$ con molt. alg. 1

$\boxed{\lambda_1 = 2}$ Calcolo dell'autospazio $V_2$:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y \text{ qualunque} \end{cases} \Rightarrow V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ k \\ h \end{pmatrix}, h,k \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow$ m.g.(2) = 2 (vedi b)

$\boxed{\lambda_2 = 3}$ Calcolo dell'autospazio $V_3$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \end{cases} \Rightarrow V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \ell \\ -\ell \end{pmatrix}, \ell \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow$ m.g.(3) = 1 (vedi b)

b) Poiché $\begin{pmatrix} h \\ k \\ h \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e i due vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono indipendenti: $\dim V_2 = 2$

Quindi m.g.(2) = $\dim V_2 = 2$ = m.a.(2)
Ovviamente $1 \leq$ m.g.(3) $\leq$ m.a.(3) = 1

$\Rightarrow$ tutti gli autovalori hanno m.a. uguale alla m.g.
La somma di tali molteplicità è 3 = $\dim \mathbb{R}^3$ spazio su cui opera l'endomorfismo rappresentato rispetto alla base canonica da A

$\Downarrow$

la matrice è diagonalizzabile

Una base di autovettori si trova unendo una base di $V_2$ , ad es. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, a una di $V_3$, ad es. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

N.B. $(f(\underline{u}_1), f(\underline{u}_2), f(\underline{u}_3)) = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (lettura come nelle soluzioni).