*Cognome*__________________________*Nome*______________________*matr.*__________

*Intendo sostenere l'**orale** nel periodo* (spuntare il periodo che interessa. L'esame può essere al pomeriggio, ma non nel week-end):
☐ ***30 – 31 luglio*** ☐ ***3 – 4 agosto***
con l'esclusione dei seguenti giorni: ……………………………………………………………………
indirizzo e-mail:

Consegnare solo questo foglio: esso deve contenere oltre ai risultati anche lo svolgimento e le opportune giustificazioni. *Ogni quesito vale 7 punti.*

Matematica del Discreto per Informatica

28 luglio 2015

1. Denotato con $\mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi di grado ≤ 3, considerare l'applicazione lineare f: $\mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$ che, al variare dei coefficienti a, b, c, d in $\mathbb{R}$, è definita da

$$f(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}.$$

a) Determinare il più generale polinomio appartenente al nucleo di f.
b) Determinare una base $\mathcal{B}$ per ker(f).
c) Completare la base $\mathcal{B}$ a una base $\mathcal{A}$ di $\mathbb{R}_3[x]$.

Risposte:

a) $p(x) \in \ker(f) \Leftrightarrow$ $p(x) = h+2hx-4kx^2+kx^3,\ h,k \in \mathbb{R}$	b) $\mathcal{B} = \{1+2x,\ -4x^2+x^3\}$	c) $\mathcal{A} = \{1+2x,\ -4x^2+x^3,\ 1,\ x^2\}$

Elaborato:

a) $f(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{pmatrix}2a-b\\ c+4d\end{pmatrix}$
Per trovare i vettori che stanno in ker f basta trovare gli $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ per cui risulta $\begin{pmatrix}2a-b\\ c+4d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ e sostituire i coeff. trovati nel polinomio $a+bx+cx^2+dx^3$.
Il sist. lineare omogeneo si riscrive come $\begin{cases} b=2a\\ c=-4d\end{cases}$ e quindi le sue soluzioni sono $\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h\\ 2h\\ -4k\\ k\end{pmatrix}$ con h,k variabili in $\mathbb{R}$. Dunque il più generale polinomio appartenente a ker f ha la forma $h+2hx-4kx^2+kx^3$.

b) Si vede che $p(x)=h(1+2x)+k(-4x^2+x^3)$ cioè ogni vettore del nucleo è combinazione lineare di $p_1(x)=1+2x$ e $p_2(x)=-4x^2+x^3$.
Quindi $\{p_1(x), p_2(x)\}$ costituisce un sistema di generatori di ker f.
Essi sono indipendenti poiché $h p_1(x)+k p_2(x)=0$ (polinomio nullo) se e solo se sono uguali a zero tutti i coefficienti di $p(x)$, in particolare: il termine noto: h e il coefficiente del termine di grado 3: k.
Cioè $h p_1(x)+k p_2(x)=0 \Rightarrow h=k=0$: che è la def. di vettori linearmente indipendenti $\Rightarrow \mathcal{B}=\{p_1(x), p_2(x)\}$.

c) Dato che $\mathbb{R}_3[x]$ ha dimensione 4, basta trovare due polinomi indipendenti da $p_1(x)$ e $p_2(x)$. Considero la base canonica di $\mathbb{R}_3[x]$: $\{1,x,x^2,x^3\}$ e il sistema di generatori ottenuto unendola a $\mathcal{B}$. È evidente che $\{1+2x, -4x^2+x^3, 1\}$ è un sist. linearm. indipendente poiché $gr(1)<gr(p_1)<gr(p_2)$.
Invece non lo è $\{1+2x, -4x^2+x^3, 1, x\}$ poiché $x=\frac{1}{2}\left((1+2x)-(1)\right)$.
Lo è $\{1+2x, -4x^2+x^3, 1, x^2\}$ poiché $\alpha(1+2x)+\beta(-4x^2+x^3)+\gamma\cdot 1+\delta x^2=0 \Leftrightarrow$
$\begin{cases}\alpha+\gamma=0\\ 2\alpha=0\\ -4\beta+\delta=0\\ \beta=0\end{cases}$ che implica $\begin{cases}\alpha=0\\ \gamma=0\\ \beta=0\\ \delta=0\end{cases}$. Quindi il sistema di polinomi trovato è una base di $\mathbb{R}_3[x]$.

2. Data la matrice a elementi reali $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

a) verificare che A è ortogonale,
b) determinare le matrici A^2 e A^3,
c) mostrare che $S = \{A, A^2, A^3\}$ è un sottogruppo del gruppo delle matrici ortogonali $O_3(\mathbb{R})$ (in cui l'operazione è il prodotto righe per colonne).

Risposte:	b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Elaborato:

a) A è ortogonale se e solo se $AA^T = I = A^TA$

Ora $AA^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^TA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Per verificare che $(S, \cdot)$ è un sottogruppo di $(O_3(\mathbb{R}), \cdot)$ basta verificare che:

1) non è vuoto: ma è ovvio poiché S è definito elencando le matrici che ne fanno parte

2) che il prodotto di due matrici $B, C \in S$ comunque scelte appartiene a S; ora si vede che ognuna di tali matrici è una potenza di A: $B = A^h$, $C = A^k$. Quindi $BC = A^hA^k = A^{h+k}$: se $h+k \leq 3$ si ha una delle potenze elencate nella definizione di S; se $h+k > 3$ si ha che $h+k \leq 6$ poiché $0<h\leq 3$ e $0<k\leq 3$: quindi posso scrivere $h+k = 3+\ell$ con $0<\ell<3$ e di conseguenza $A^{h+k} = A^{3+\ell} = A^3A^\ell = IA^\ell = A^\ell$ è ancora una matrice appartenente a S

3) L'inversa di ogni matrice di S appartiene a S: ma questo è ovvio poiché si ha $A \cdot A^2 = A^2A = I$ il che garantisce che A^2 è l'inversa di A e viceversa e inoltre I (in quanto elemento neutro risp. al prodotto) è inversa di se stessa.

3. Nell'insieme S dei polinomi $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ della forma $p(x) = ax^3 + (a-2b)x^2 + bx$ (con $a, b \in \mathbb{R}$) considerare la relazione $\mathcal{R}$ così definita:

$$p_1(x)\ \mathcal{R}\ p_2(x) \text{ se e solo se } (x-1) \text{ divide } p_1(x) - p_2(x).$$

a) Verificare che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza.
b) Determinare l'insieme dei polinomi equivalenti a $p_1(x) = x^3 - x^2 + x$.
c) Nella classe di equivalenza così determinata trovare il polinomio $q(x)$ di grado minimo.

Risposte

b) $\mathcal{R}(p_1) = \{p(x) = ax^3 + (2a-3)x^2 + (2a-1)x,\ a \in \mathbb{R}\}$	c) $q(x) = 2x^2 - x$

Elaborato:

a) $\mathcal{R}$ è una rel. di equivalenza poiché $\forall\, p_1(x), p_2(x), p_3(x) \in S'$ si ha:

1) $x-1$ divide $p_1(x)-p_1(x)=0$ (quoziente: polinomio zero) $\Rightarrow \mathcal{R}$ è riflessiva

2) se $x-1$ divide $p_1(x)-p_2(x)$ allora divide $p_2(x)-p_1(x) = -(p_1(x)-p_2(x))$ (il quoziente è l'opposto di quello di $p_1(x)-p_2(x)$ diviso $x-1$) $\Rightarrow \mathcal{R}$ simmetrica

3) se $x-1$ divide $p_1(x)-p_2(x)$ e divide $p_2(x)-p_3(x)$ allora divide anche $p_1(x)-p_3(x) = (p_1(x)-p_2(x)) + (p_2(x)-p_3(x))$ (il quoziente è la somma dei 2 quozienti) $\Rightarrow \mathcal{R}$ è transitiva.

b) un polinomio $p_2(x) = ax^3 + (a-2b)x^2 + bx$ è equivalente a $p_1(x) = x^3 - x^2 + x$ se e solo se $p_1(x)-p_2(x) = (1-a)x^3 + (-1-a+2b)x^2 + (1-b)x$ è divisibile per $(x-1)$. Per il teorema di Ruffini ciò succede se e solo se $p_1(1)-p_2(1)=0$, cioè se e solo se $(1-a) + (2b-a-1) + (1-b) = 0 \iff b-2a+1=0 \iff b = -1+2a$

Quindi i polinomi equivalenti a $p_1(x)$ hanno la forma $p(x) = ax^3 + (2-3a)x^2 + (2a-1)x$

c) Nell'insieme $\mathcal{R}(p_1)$ il polinomio di grado minimo è quello che ha coefficiente di x^3 nullo, cioè $a=0$. Quindi $q(x) = 2x^2 - x$.

4. Considerare i numeri interi 2703 e 1537.
   a) Usando l'algoritmo euclideo determinare il loro massimo comun divisore.
   b) Stabilire se l'equazione diofantea $2703x + 1537y = 106$ è risolubile e in caso affermativo determinarne tutte le soluzioni.

Risposte:	a) M.C.D.(2703,1537) = 53	b) $(x,y) = (8+29k, -14-51k)$ con $k \in \mathbb{Z}$

Elaborato:

a) I quozienti e i resti nelle divisioni successive sono quelli sotto indicati:

$$\begin{aligned} 2703 &= 1537 \cdot 1 + 1166 \\ 1537 &= 1166 \cdot 1 + 371 \\ 1166 &= 371 \cdot 3 + 53 \\ 371 &= 53 \cdot 7 + \boxed{0} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ M.C.D.$(2703, 1537) = 53$ e poiché 53 divide il termine noto, 106, dell'eq. diofantea tale eq. è risolubile.

b) dalle divisioni attuate per applicare l'algoritmo euclideo si ricava

$$\begin{aligned} 1166 &= 2703 - 1537 \\ 371 &= 1537 - 1166 = 1537 \cdot 2 - 2703 \\ 53 &= 1166 - 371 \cdot 3 = 2703 - 1537 - (1537 \cdot 2 - 2703) \cdot 3 = 2703 \cdot 4 + 1537 \cdot (-7) \end{aligned}$$

Quindi la coppia $(4,-7)$ è una soluzione particolare dell'equazione diofantea $2703x' + 1537y' = 53$. Quella assegnata ha termine noto doppio di quello di questa; quindi una sua sol. particolare è $(x_0, y_0) = (8, -14)$.
Tutte le soluzioni si ottengono come

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{1537}{53}k \\ y = y_0 - \frac{2703}{53}k \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}, \text{ cioè } \begin{cases} x = 8 + 29k \\ y = -14 - 51k \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

5. In $\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ è data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinare gli autovalori e i corrispondenti autospazi di A.

b) Trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di A.

Risposte:

a) $\lambda_1 = 1$, $V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 4h \\ 0 \\ -3h \end{pmatrix}, h \in \mathbb{R} \right\}$ $\lambda_2 = -4$, $V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} -3/5\,k \\ k \\ -4/5\,k \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R} \right\}$ $\lambda_3 = 6$, $V_{\lambda_3} = \left\{ \begin{pmatrix} 3/5\,\ell \\ \ell \\ 4/5\,\ell \end{pmatrix}, \ell \in \mathbb{R} \right\}$	b) $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 0 \\ -3/5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -3/5\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ -4/5\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 3/5\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 4/5\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Elaborato:

a) Determino il polinomio caratteristico di A

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} \boxed{1-\lambda \quad 3 \quad 0} \\ 3 \quad 1-\lambda \quad 4 \\ 0 \quad 4 \quad 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 16\right) - 9(1-\lambda) + 0 =$$

$$= (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 25\right) = (1-\lambda)(1-\lambda-5)(1-\lambda+5) = (1-\lambda)(-4-\lambda)(6-\lambda).$$

Gli autovalori di A sono le sue radici: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -4$, $\lambda_3 = 6$

Autospazio relativo a:

$\boxed{\lambda_1 = 1}$ $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ \cancel{0} & \cancel{4} & \cancel{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3y = 0 \\ 3x + 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4h \\ 0 \\ -3h \end{pmatrix}, h \in \mathbb{R} \Rightarrow V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 4h \\ 0 \\ -3h \end{pmatrix}, h \in \mathbb{R} \right\}$

$\boxed{\lambda_2 = -4}$ $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = -3/5\, y \\ -9/5\, y + 5y - 16/5\, y = 0 \quad \text{IDENTITÀ!} \\ z = -4/5\, y \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5\,k \\ k \\ -4/5\,k \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{-4} = \left\{ \begin{pmatrix} -3/5\,k \\ k \\ -4/5\,k \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R} \right\}$

$\boxed{\lambda_3 = 6}$ $\begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = 3/5\, y \\ 9/5\, y - 5y + 16/5\, y = 0 \quad \text{IDENTITÀ} \\ z = 4/5\, y \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5\,\ell \\ \ell \\ 4/5\,\ell \end{pmatrix}, \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow V_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 3/5\,\ell \\ \ell \\ 4/5\,\ell \end{pmatrix}, \ell \in \mathbb{R} \right\}$

b) La matrice A è simmetrica e ha tre autovalori distinti: quindi gli autovettori relativi ad autovalori distinti sono a due a due ortogonali. Per avere una base ortogonale basta allora scegliere un vettore non nullo in ciascuno dei 3 autospazi (ad es. prendendo il parametro $= 1$)

Questi vettori però non hanno necessariamente norma 1.

La norma dei vettori di V_1 è $\sqrt{16h^2 + 0 + 9h^2} = 5|h|$ e quindi un autovettore di norma 1 è $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 0 \\ -3/5 \end{pmatrix}$.

La norma dei vettori di V_{-4} è $\sqrt{\frac{9}{25}k^2 + k^2 + \frac{16}{25}k^2} = \sqrt{2}|k|$ e quindi un autovettore di norma 1 è $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -3/5\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ -4/5\sqrt{2} \end{pmatrix}$

La norma dei vettori di V_6 è $\sqrt{9/25\,\ell^2 + \ell^2 + 16/25\,\ell^2} = \sqrt{2}|\ell|$ e quindi un autovett. di norma 1 è $\underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 3/5\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 4/5\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Si noti che effettivamente: $\underline{u}_1 \circ \underline{u}_2 = \underline{u}_2 \circ \underline{u}_3 = \underline{u}_1 \circ \underline{u}_3 = 0$.