A

*Cognome*______________________________*Nome*__________________________*matr.*__________

*Intendo sostenere l'**orale** nel periodo* (spuntare il periodo che interessa. L'esame può essere al pomeriggio, ma non nel week-end):
☐ ***22 – 26 giugno*** ☐ ***29 giugno – 6 luglio*** ☐ ***8 – 17 luglio*** ☐ ***20 – 31 luglio***
con l'esclusione dei seguenti giorni: ....
Se il voto è < ...... intendo sostenere la prova completa del ☐ 7/7 ☐ 28/7 (spuntare la data che interessa)
indirizzo e-mail:

Consegnare solo questo foglio: esso deve contenere oltre ai risultati anche lo svolgimento e le opportune giustificazioni. *Ogni quesito vale 7 punti.*

Matematica del Discreto per Informatica – Secondo compitino

18 giugno 2015

1. Il numero intero K = 958634 appartiene a una classe di resto modulo 11.

   a) Determinare a quale classe $[r]_{11}$, con $r \in \{0,1,\ldots,10\}$, appartiene K.

   b) Risolvere il sistema di congruenze lineari $\begin{cases} x \equiv 4 \mod 15 \\ x \equiv r \mod 14 \end{cases}$

Risposte:

a) $r = 6$	b) $x = 34 + 210h,\ h \in \mathbb{Z}$

Elaborato:

a) Cerco il resto nella divisione di $K = 958634$ per 11.
Ricordando che $10^{2h} \equiv_{11} 1$, $10^{2h+1} \equiv_{11} -1$ ($\forall h$ intero ≥ 0) si ha $K \equiv_{11} -9+5-8+6-3+4=-5$
e $-5 \equiv_{11} 6$. Quindi $r=6$.

OPPURE:

$$\begin{array}{l|l} 958634 & 11 \\ \quad 78 & \overline{87148} \\ \quad\ 16 & \\ \quad\ \ 53 & \\ \quad\ \ \ 94 & \\ \quad\ \ \ \ 6 & \end{array}$$

$\boxed{\text{Resto: } 6}$ $\Rightarrow K \in [6]_{11}$

b) Osservo che $MCD(15,14)=1$ poiché 14 e 15 sono consecutivi. Quindi si può applicare il teorema cinese del resto: il sistema di congruenze lineari ha soluzioni e, se c è una di esse, tutte e sole le altre sono della forma $x = c + 14 \cdot 15h$, $h \in \mathbb{Z}$.
Cerco c risolvendo le due congruenze lineari ausiliarie

$14y_1 \equiv 1 \mod 15 \iff -y_1 \equiv 1 \mod 15$ (poiché $14 \equiv_{15} -1$) $\iff y_1 \equiv -1 \mod 15$

$15y_2 \equiv 1 \mod 14 \iff y_2 \equiv 1 \mod 14$ (poiché $15 \equiv_{14} 1$)

Allora il sistema di congruenze lineari $\begin{cases} x \equiv 4 \mod 15 \\ x \equiv 6 \mod 14 \end{cases}$

ha tra le sue soluzioni $c = (-1) \cdot 14 \cdot 4 + (1) \cdot 15 \cdot 6 = 90 - 56 = 34$

e quindi le soluzioni hanno la forma

$$x = 34 + 210h \quad h \in \mathbb{Z}$$

2. Nel gruppo $O_2(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate P di ordine 2 ortogonali (cioè tali che $PP^T=I$) in cui il prodotto è l'ordinario prodotto righe per colonne, considerare il sottoinsieme S delle matrici diagonali.

a) Mostrare che S è un sottogruppo di $O_2(\mathbb{R})$.
b) Elencare gli elementi di S.
c) $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ è una matrice di $O_2(\mathbb{R})$. Mostrare che, se $P\in S$ ma $P \neq \pm I$, la matrice $Q^{-1}PQ$ non appartiene a S. Il sottogruppo S è normale in $O_2(\mathbb{R})$?

Risposte (cancellare l'affermazione sbagliata):

b) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	c) $(S,\cdot)$ ~~è~~ non è un sottogruppo normale di $O_2(\mathbb{R})$

Elaborato:

a) Nelle matrici ortogonali di ordine 2 il sottoinsieme S delle matrici diagonali costituisce un sottogruppo perché:
i) non è vuoto contenendo almeno la matrice $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ che è ortogonale e diagonale.
ii) il prodotto di 2 matrici diagonali $\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'&0\\0&b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aa'&0\\0&bb'\end{pmatrix}$ è certamente una matrice diagonale (e se le due matrici sono ortogonali anche il prodotto lo è).
iii) l'inversa di una matrice diagonale $\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}^{-1}_{a,b\neq 0}$, $\begin{pmatrix}1/a&0\\0&1/b\end{pmatrix}$ è ancora diagonale (e se la matrice è ortogonale lo è anche l'inversa).

b) Poiché deve essere $P=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$ e $PP^T=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, cioè $\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&0\\0&b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ l'insieme S è formato dalle matrici con $a=\pm 1$ e $b=\pm 1$, cioè
$S=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$.

c) Notiamo che le 4 matrici di S sono di due tipi: $\pm I$ e $\pm\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$. Facciamo la verifica con $P=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, quella con P^{-1} differisce solo per un prodotto per (-1).
Poiché Q è ortogonale (infatti $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=I$), si ha $Q^{-1}=Q^T \Rightarrow$
$Q^{-1}PQ=Q^TPQ=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-2\\-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$ che è ortogonale ma non diagonale! Quindi S non è normale in $O_2(\mathbb{R})$ poiché, se lo fosse, $\forall P\in S$, $\forall Q\in O_2(\mathbb{R})$ si avrebbe $Q^{-1}PQ\in S$.

3. Nello spazio vettoriale $V=\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ considerare i due sottospazi: $U=\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle$ generato dai vettori $\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}$ e $\mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}$ e $W=\left\{\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}\in V,\ \begin{cases}x-2y=0\\2y+z-w=0\end{cases}\right\}$.

a) Determinare una base di W.
b) Completare la base assegnata di U a una base di $U+W$.
c) Determinare la dimensione di $U\cap W$.

Risposte:

a) base di W: $\mathbf{w}_1=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$, $\underline{w}_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$	b) base di $U+W$: $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\underline{w}_1$	c) $\dim U\cap W=1$

Elaborato:

a) $W=\left\{\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}),\ \begin{cases}x-2y=0\\2y+z-w=0\end{cases}\right\}$: risolvendo il sistema, ad esempio ricavando $\begin{cases}x=2y\\y=y\\z=z\\w=2y+z\end{cases}$ si vede che le matrici appartenenti a W hanno la forma $\begin{pmatrix}2y&y\\z&2y+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}y+\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}z$. Quindi una base di W

è $\left\{ \begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} \right\}$. Chiamiamo w_1 la prima matrice, w_2 la seconda: in realtà abbiamo solo mostrato che w_1, w_2 generano W. D'altra parte le due matrici sono linearmente indipendenti poiché non sono proporzionali; quindi formano una base di W.

b) U ha base $u_1 = \begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}$. Evidentemente $\{u_1, u_2, w_1, w_2\}$ è un sistema di generatori di $U+W = \{u+w,\ u \in U,\ w \in W\}$: vediamo se questi vettori sono tutti lin. indipendenti.

$w_1 = a u_1 + b u_2 \iff \begin{cases} a + b = 2 \\ 0a - b = 1 \\ -a + b = 0 \\ 0a + 2b = 2 \end{cases}$ le equazioni indicate dalla freccia sono incompatibili $\Rightarrow$ il sistema è impossibile $\Rightarrow \{u_1, u_2, w_1\}$ sono lin. ind.

$w_2 = a u_1 + b u_2 + c w_1 \iff \begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ -b + c = 0 \\ -a + b = 1 \\ 2b + 2c = 1 \end{cases} \underset{\text{GAUSS}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} c = 1/4 \\ b = -1/4 \\ a = -1/4 \end{cases}$

cioè $w_2 = -\frac{1}{4} u_1 - \frac{1}{4} u_2 + \frac{1}{4} w_1$ è dipendente dagli altri 3 vettori. Dunque una base di $U+W$ è $\{u_1, u_2, w_1\}$

c) Per la formula di Grassmann: $\dim U \cap W = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 2+2-3 = 1$.

4. I vettori $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ sono una base di R^3 e $f : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ è l'applicazione lineare tale che

$$f(\mathbf{u}_1) = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix},\quad f(\mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_3 \text{ genera il nucleo di } f.$$

a) Determinare l'immagine mediante f del vettore $\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$.

b) Quali sono le componenti x, y, z, del più generale vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ di R^3 tale che $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}_2)$?

c) Determinare la matrice che rappresenta l'applicazione lineare rispetto alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ di R^3.

Risposte:	a) $f(\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$	b) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}k\\2-k\\k\end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$	c) $A = \begin{pmatrix}-3 & 0 & 3\\-1 & 1/2 & 3/2\\-1 & -1/2 & 1/2\end{pmatrix}$

Elaborato:

a) per ipotesi $f(u_3) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Inoltre f è lineare, quindi $f(u_2 + 2u_3) = f(u_2) + 2f(u_3) = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

b) $f(v) = f(u_2) \iff f(v) - f(u_2) = 0 \iff f(v - u_2) = 0$ (sempre per la linearità)
$\iff v - u_2 \in \ker f \iff v \in u_2 + \ker f = \left\{\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\ k \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}k\\2-k\\k\end{pmatrix},\ k \in \mathbb{R}\right\}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k\\2-k\\k\end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$.

c) Osservo che $u_1 = -e_1$, $u_2 = 2e_1$ e $u_3 = e_1 - e_2 + e_3$

quindi $\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} = f(u_1) = -f(e_1)$, $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = f(u_2) = 2f(e_2)$, $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = f(u_3) = f(e_1) - f(e_2) + f(e_3)$.

Dalle prime due ricavo:

$f(e_1) = \begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $f(e_2) = \begin{pmatrix}0\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}$

dalla terza: $f(e_3) = f(e_2) - f(e_1) = \begin{pmatrix}0\\1/2\\-1/2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3/2\\1/2\end{pmatrix}$

Allora:

$(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = (e_1, e_2, e_3)\begin{pmatrix}-3 & 0 & 3\\-1 & 1/2 & 3/2\\-1 & -1/2 & 1/2\end{pmatrix} \Rightarrow$ la matrice rappresentativa rispetto a questa base è $A = \begin{pmatrix}-3 & 0 & 3\\-1 & 1/2 & 3/2\\-1 & -1/2 & 1/2\end{pmatrix}$

5. In $\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ è data la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Trovare gli autovalori e i corrispondenti autospazi di A.

b) Trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di A.

Risposte:

a) $\lambda_1 = -1$, $V_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ -2h \end{pmatrix}, h \in \mathbb{R} \right\}$, $\lambda_2 = 4$, $V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 2k \\ \ell \\ k \end{pmatrix}, k, \ell \in \mathbb{R} \right\}$	b) $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Elaborato:

a) $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)[-\lambda(3-\lambda)-4] = (4-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-4) = (4-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-4)$
è il polinomio caratteristico di A

Quindi la matrice A ha 2 autovalori: $\lambda_1 = -1$ con molteplicità algebrica 1, $\lambda_2 = 4$ con molteplicità algebrica 2: in ogni caso, dato che la matrice A è simmetrica, sarà diagonalizzabile (e quindi l'autospazio relativo a 4 avrà dimensione 2).

Autospazi:

$\boxed{\lambda_1 = -1}$ $\begin{pmatrix} \cancel{4} & \cancel{0} & \cancel{2} \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow V_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ -2h \end{pmatrix}, h \in \mathbb{R} \right\}$

$\boxed{\lambda_2 = 4}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 2z \Rightarrow V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 2k \\ \ell \\ k \end{pmatrix}, k, \ell \in \mathbb{R} \right\}$.

b) V_{-1} ha una base formata dal solo vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

V_4 ha una base formata da due vettori, ad esempio $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di autovettori di A: il primo è certamente ortogonale agli altri 2 poiché relativo ad autovalore diverso; quelli della base di V_4 sono ortogonali ... perché siamo fortunati![(*)] Per trovare una base ortonormale di autovettori basta allora dividere ciascun vettore della base per la sua norma:

$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1+0+4} = \sqrt{5} = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|$; $\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 1 \Rightarrow$ base ortonormale $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Rispetto a questa base, così ordinata, l'appl. è rappresentata da $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(*) Ricordiamo che essere ortogonali significa che $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{DF}{=} [2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0] = 0$
e similmente $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$