C

*Cognome*____________________________*Nome*_______________________*matr.*________

*Intendo sostenere l'***orale** *nel periodo* (spuntare il periodo che interessa. L'esame può essere al pomeriggio, ma non nel week-end):
☐ ***22 – 26 giugno*** ☐ ***29 giugno – 6 luglio*** ☐ ***8 – 17 luglio*** ☐ ***20 – 31 luglio***
con l'esclusione dei seguenti giorni: ………………………………………………………………………
Se il voto è < …… intendo sostenere la prova completa del ☐ 7/7 ☐ 28/7 (spuntare la data che interessa)
indirizzo e-mail:

Consegnare solo questo foglio: esso deve contenere oltre ai risultati anche lo svolgimento e le opportune giustificazioni. *Ogni quesito vale 7 punti.*

Matematica del Discreto per Informatica – Secondo compitino

18 giugno 2015

1. Il numero intero K = 974583 appartiene a una classe di resto modulo 11.
   a) Determinare a quale classe $[r]_{11}$, con $r \in \{0,1,\ldots,10\}$, appartiene K.
   b) Risolvere il sistema di congruenze lineari $\begin{cases} x \equiv r \mod 15 \\ x \equiv 8 \mod 14 \end{cases}$

Risposte:

a) $r =$ ……	b) $x =$ …………..

Elaborato:

2. Nel gruppo $O_2(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate P di ordine 2 ortogonali (cioè tali che $PP^T=I$) in cui il prodotto è l'ordinario prodotto righe per colonne, considerare il sottoinsieme S delle matrici diagonali.

   a) Mostrare che S è un sottogruppo di $O_2(\mathbb{R})$.
   b) Elencare gli elementi di S.
   c) $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ è una matrice di $O_2(\mathbb{R})$. Mostrare che, se $P \in S$ ma $P \neq \pm I$, la matrice $Q^{-1}PQ$ non appartiene a S. Il sottogruppo S è normale in $O_2(\mathbb{R})$?

Risposte (cancellare l'affermazione sbagliata):

b)	c) $(S,\cdot)$ è / non è un sottogruppo normale di $O_2(\mathbb{R})$

Elaborato:

3. Nello spazio vettoriale $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ considerare i due sottospazi: $U = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ generato dai vettori $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in V, \ \begin{cases} z - 2w = 0 \\ x - y + 2w = 0 \end{cases} \right\}$.

   a) Determinare una base di W.
   b) Completare la base assegnata di U a una base di $U + W$.
   c) Determinare la dimensione di $U \cap W$.

   Risposte:

a) base di W: $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$,	b) base di $U + W$: $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$,	c) dim $U \cap W =$

   Elaborato:

4. I vettori $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è l'applicazione lineare tale che

$$f(\mathbf{u}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_3 \text{ genera il nucleo di } f.$$

a) Determinare l'immagine mediante f del vettore $\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_3$.

b) Quali sono le componenti x, y, z, del più generale vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}_2)$?

c) Determinare la matrice che rappresenta l'applicazione lineare rispetto alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$.

Risposte:

a) $f(\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$	b) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$	c) $A = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

Elaborato:

5. In $\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ è data la matrice. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Trovare gli autovalori e i corrispondenti autospazi di *A*.

b) Trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di *A*.

Risposte:

a) $\lambda_1 =$	b) $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

Elaborato: