

D

Cognome _____ Nome _____ matr. _____

Intendo sostenere l'orale nel periodo (spuntare il periodo che interessa. L'esame può essere al pomeriggio, ma non nel week-end): 22 – 26 giugno 29 giugno – 6 luglio 8 – 17 luglio 20 – 31 luglio

con l'esclusione dei seguenti giorni:

Se il voto è < intendo sostenere la prova completa del 7/7 28/7 (spuntare la data che interessa)

indirizzo e-mail: _____

Consegnare solo questo foglio: esso deve contenere oltre ai risultati anche lo svolgimento e le opportune giustificazioni. Ogni quesito vale 7 punti.**Matematica del Discreto per Informatica – Secondo compito**

18 giugno 2015

1. Il numero intero $K = 937621$ appartiene a una classe di resto modulo 11.a) Determinare a quale classe $[r]_{11}$, con $r \in \{0, 1, \dots, 10\}$, appartiene K .b) Risolvere il sistema di congruenze lineari
$$\begin{cases} x \equiv r \pmod{21} \\ x \equiv 8 \pmod{20} \end{cases}$$

Risposte:

a) $r = \dots\dots$ b) $x = \dots\dots\dots$

Elaborato:

2. Nel gruppo $O_2(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate P di ordine 2 ortogonali (cioè tali che $PP^T=I$) in cui il prodotto è l'ordinario prodotto righe per colonne, considerare il sottoinsieme S delle matrici diagonali.

a) Mostrare che S è un sottogruppo di $O_2(\mathbb{R})$.

b) Elencare gli elementi di S .

c) $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è una matrice di $O_2(\mathbb{R})$. Mostrare che, se $P \in S$ ma $P \neq \pm I$, la matrice $Q^{-1}PQ$

non appartiene a S . Il sottogruppo S è normale in $O_2(\mathbb{R})$?

Risposte (cancellare l'affermazione sbagliata):

b)	c) (S, \cdot) è / non è un sottogruppo normale di $O_2(\mathbb{R})$
----	---

Elaborato:

3. Nello spazio vettoriale $V = \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ considerare i due sottospazi: $U = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ generato dai

vettori $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in V, \begin{cases} 2z - w = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases} \right\}$.

a) Determinare una base di W .

b) Completare la base assegnata di U a una base di $U + W$.

c) Determinare la dimensione di $U \cap W$.

Risposte:

a) base di W : $\mathbf{w}_1 = \left(\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \right)$,	b) base di $U + W$: $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$,	c) $\dim U \cap W =$
---	---	----------------------

Elaborato:

4. I vettori $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sono una base di \mathbb{R}^3 e $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è l'applicazione lineare tale che

$$f(\mathbf{u}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{u}_3 \text{ genera il nucleo di } f.$$

- Determinare l'immagine mediante f del vettore $\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3$.
- Quali sono le componenti x, y, z , del più generale vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ di \mathbb{R}^3 tale che $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}_2)$?
- Determinare la matrice che rappresenta l'applicazione lineare rispetto alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ di \mathbb{R}^3 .

Risposte:

a) $f(\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$	b) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$	c) $A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$
--	---	--

Elaborato:

5. In $\text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ è data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- a) Trovare gli autovalori e i corrispondenti autospazi di A .
- b) Trovare una base ortonormale di \mathbb{R}^3 di autovettori di A .

Risposte:

a) $\lambda_1 =$	b) $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$
------------------	---

Elaborato: