D

*Cognome*____________________________*Nome*________________________*matr.*________

*Intendo sostenere l'**orale** nel periodo* (spuntare il periodo che interessa. L'esame può essere al pomeriggio, ma non nel week-end):
☐ ***22 – 26 giugno*** ☐ ***29 giugno – 6 luglio*** ☐ ***8 – 17 luglio*** ☐ ***20 – 31 luglio***
con l'esclusione dei seguenti giorni: ……………………………………………………………………………
Se il voto è < …… intendo sostenere la prova completa del ☐ 7/7 ☐ 28/7 (spuntare la data che interessa)
indirizzo e-mail:

Consegnare solo questo foglio: esso deve contenere oltre ai risultati anche lo svolgimento e le opportune giustificazioni. *Ogni quesito vale 7 punti.*

Matematica del Discreto per Informatica – Secondo compitino

18 giugno 2015

1. Il numero intero K = 937621 appartiene a una classe di resto modulo 11.
   a) Determinare a quale classe $[r]_{11}$, con $r\in\{0,1,\dots,10\}$, appartiene K.
   b) Risolvere il sistema di congruenze lineari $\begin{cases} x\equiv r \mod 21 \\ x\equiv 8 \mod 20\end{cases}$

Risposte:	a) $r = 3$	b) $x = 108 + 420h,\ h\in\mathbb{Z}$

Elaborato:

a) Cerco il resto nella divisione per 11 di $k=937621$.
Ricordando che $10^{2h}\equiv_{11} 1$, $10^{2h+1}\equiv_{11} -1$ ($\forall h$ intero ≥ 0) si ha $k\equiv_{11} -9+3-7+6-2+1 = -8 \equiv_{11} 3$.
Quindi $r=3$

OPPURE: 937621 : 11 = 85238
57
26
42
91
3

$\boxed{\text{Resto: }3}$ $\Rightarrow k\in[3]_{11}$

b) Osservo che $MCD(21,20)=1$ poiché 21 e 20 sono consecutivi. Quindi si può applicare il teorema cinese del resto: il sistema di congruenze lineari ha soluzioni e, se c è una di esse, tutte e sole le altre sono della forma $x = c + 20\cdot 21 h$, $h\in\mathbb{Z}$.
Cerco c risolvendo le due congruenze lineari ausiliarie:
$20y_1 \equiv 1 \mod 21 \iff -1\cdot y_1 \equiv 1 \mod 21$ (poiché $20\equiv -1 \mod 21$) $\iff y_1\equiv -1 \mod 21$
$21y_2 \equiv 1 \mod 20 \iff y_2 \equiv 1 \mod 20$ (poiché $21\equiv 1 \mod 20$)
Allora il sistema di congruenze lineari $\begin{cases} x\equiv 3 \mod 21 \\ x\equiv 8 \mod 20\end{cases}$

ha tra le sue soluzioni $c = (-1)\cdot 20\cdot 3 + 1\cdot 21\cdot 8 = 168 - 60 = 108$
e quindi le soluzioni hanno la forma $\boxed{x = 108 + 420h,\ h\in\mathbb{Z}}$

2. Nel gruppo $O_2(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate P di ordine 2 ortogonali (cioè tali che $PP^T=I$) in cui il prodotto è l'ordinario prodotto righe per colonne, considerare il sottoinsieme S delle matrici diagonali.

a) Mostrare che S è un sottogruppo di $O_2(\mathbb{R})$.
b) Elencare gli elementi di S.
c) $Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ è una matrice di $O_2(\mathbb{R})$. Mostrare che, se $P\in S$ ma $P\neq \pm I$, la matrice $Q^{-1}PQ$ non appartiene a S. Il sottogruppo S è normale in $O_2(\mathbb{R})$?

Risposte (cancellare l'affermazione sbagliata):

b) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	c) $(S,\cdot)$ ~~è~~ non è un sottogruppo normale di $O_2(\mathbb{R})$

Elaborato:

a) Nelle matrici ortogonali di ordine 2 il sottoinsieme S delle matrici diagonali costituisce un sottogruppo perché:
i) non è vuoto, contenendo almeno la matrice $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ che è ortogonale e diagonale;
ii) il prodotto di due matrici diagonali $\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'&0\\0&b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aa'&0\\0&bb'\end{pmatrix}$ è una matrice diagonale e se le due matrici sono ortogonali anche il loro prodotto lo è (so che $O_2(\mathbb{R})$ è un gruppo risp. al prodotto);
iii) l'inversa di una matrice diagonale $\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$, con $ab\neq 0$, è la matrice diagonale $\begin{pmatrix}1/a&0\\0&1/b\end{pmatrix}$ e se la matrice è ortogonale lo è anche l'inversa dato che so che $O_2(\mathbb{R})$ è gruppo risp. prod.

b) Poiché deve essere $P=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$ e $P\cdot P^T=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, cioè $\begin{pmatrix}a^2&0\\0&b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, l'insieme S è formato dalle matrici con $a=\pm 1$, $b=\pm 1$, cioè
$S=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$.

c) Notiamo che le 4 matrici di S sono di due tipi: $\pm I$, $\pm\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$. Facciamo la verifica con $P=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$(*). Poiché Q è ortogonale (infatti $QQ^T=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=I$), si ha $Q^{-1}=Q^T \Rightarrow Q^{-1}PQ=Q^TPQ=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-2\\-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$ che è ortogonale, ma non diagonale! Quindi S non è normale in $O_2(\mathbb{R})$ poiché se lo fosse, $\forall P\in S$, $\forall Q\in O_2(\mathbb{R})$ si avrebbe $Q^{-1}PQ\in S$. (*) La verifica con $-P$ differisce solo per un prodotto per (-1).

3. Nello spazio vettoriale $V=\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ considerare i due sottospazi: $U=\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle$ generato dai vettori $\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix}0&-1\\0&1\end{pmatrix}$ e $\mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}$ e $W=\left\{\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}\in V,\ \begin{cases}2z-w=0\\x-y-2z=0\end{cases}\right\}$.

a) Determinare una base di W.
b) Completare la base assegnata di U a una base di $U+W$.
c) Determinare la dimensione di $U\cap W$.

Risposte:

a) base di W: $\mathbf{w}_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\underline{w}_2=\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}$	b) base di $U+W$: $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\underline{w}_1$	c) $\dim U\cap W = 1$

Elaborato:

a) $W=\left\{\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}),\ \begin{cases}2z-w=0\\x-y-2z=0\end{cases}\right\}$: risolvendo il sistema, ad es. ricavando $\begin{cases}x=y+2z\\y=y\\z=z\\w=2z\end{cases}$ si vede che le matrici appartenenti a W hanno la forma $\begin{pmatrix}y+2z&y\\z&2z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}$. Dette $\underline{w}_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\underline{w}_2=\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}$, si vede che $\{\underline{w}_1,\underline{w}_2\}$ è una base di W poiché le 2 matrici generano W e sono linearmente indipendenti in quanto non proporzionali

b) U ha base $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Evidentemente $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{w}_1, \underline{w}_2\}$ è un sistema di generatori di $U+W = \{\underline{u}+\underline{w},\ \underline{u}\in U, \underline{w}\in W\}$: vediamo quanti di essi sono lin. indipendenti.

$$\underline{w}_1 = a\underline{u}_1 + b\underline{u}_2 \iff \begin{cases} a\cdot 0 + b\cdot 2 = 1 \\ a(-1) + b\cdot 1 = 1 \\ a\cdot 0 + b(-1) = 0 \\ a\cdot 1 + b\cdot 1 = 0 \end{cases}$$

le equazioni indicate con la doppia freccia sono incompatibili $\Rightarrow$ il sistema è impossibile $\Rightarrow \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{w}_1\}$ sono linearmente indipendenti.

$$\underline{w}_2 = a\underline{u}_1 + b\underline{u}_2 + c\underline{w}_1 \iff \begin{cases} a\cdot 0 + b\cdot 2 + c\cdot 1 = 2 \\ a\cdot(-1) + b\cdot 1 + c\cdot 1 = 0 \\ a\cdot 0 + b\cdot(-1) + c\cdot 0 = 1 \\ a\cdot 1 + b\cdot 1 + c\cdot 0 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 4 \\ -3-1+4=0 \quad \text{OK!} \\ b = -1 \\ a = 3 \end{cases}$$

sistema risolubile

cioè $\underline{w}_2 = 3\underline{u}_1 - \underline{u}_2 + 4\underline{w}_1$ è dipendente dagli altri 3 vettori. Dunque una base di $U+W$ è $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{w}_1\}$.

c) Per la formula di GRASSMANN $\dim(U\cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 2+2-3 = 1$.

4. I vettori $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sono una base di R^3 e $f: \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ è l'applicazione lineare tale che

$$f(\mathbf{u}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_3 \text{ genera il nucleo di } f.$$

a) Determinare l'immagine mediante f del vettore $\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3$.

b) Quali sono le componenti x, y, z, del più generale vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ di R^3 tale che $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}_2)$?

c) Determinare la matrice che rappresenta l'applicazione lineare rispetto alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ di R^3.

Risposte:

a) $f(\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	b) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} k \\ 3+k \\ -k \end{pmatrix}$	c) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1/3 & -4/3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1/3 & -5/3 \end{pmatrix}$

Elaborato:

a) per ipotesi $f(\underline{u}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Inoltre f è lineare, quindi $f(\underline{u}_2 - 3\underline{u}_3) = f(\underline{u}_2) - 3f(\underline{u}_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $f(\underline{v}) = f(\underline{u}_2) \iff f(\underline{v}) - f(\underline{u}_2) = \underline{0} \iff f(\underline{v} - \underline{u}_2) = \underline{0}$ (per la linearità di f) $\iff \underline{v} - \underline{u}_2 \in \ker f \iff$

$\iff \underline{v} \in \underline{u}_2 + \ker f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, k\in\mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ 3+k \\ -k \end{pmatrix}, k\in\mathbb{R} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 3+k \\ -k \end{pmatrix}, k\in\mathbb{R}$.

c) osservo che $\underline{u}_1 = -\underline{e}_1$, $\underline{u}_2 = 3\underline{e}_2$, $\underline{u}_3 = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 - \underline{e}_3$

Quindi $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = f(\underline{u}_1) = -f(\underline{e}_1)$; $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f(\underline{u}_2) = 3\underline{e}_2$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f(\underline{u}_3) = f(\underline{e}_1) + f(\underline{e}_2) - f(\underline{e}_3)$

Dalle prime due ricavo: $f(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $f(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

Dalla terza ricavo: $f(\underline{e}_3) = f(\underline{e}_1) + f(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ -1 \\ -5/3 \end{pmatrix}$

Allora:

$(f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2), f(\underline{e}_3)) = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)\begin{pmatrix} -1 & -1/3 & -4/3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1/3 & -5/3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ la matrice rappresentativa rispetto a $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ è $A = \begin{pmatrix} -1 & -1/3 & -4/3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1/3 & -5/3 \end{pmatrix}$

5. In $\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ è data la matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Trovare gli autovalori e i corrispondenti autospazi di A.

b) Trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di A.

Risposte:

a) $\lambda_1 = -1$, $V_{-1}=\left\{\begin{pmatrix} 2h \\ 0 \\ h \end{pmatrix}, h\in\mathbb{R}\right\}$; $\lambda_2=4$, $V_4=\left\{\begin{pmatrix} k \\ \ell \\ -2k \end{pmatrix}, k,\ell\in\mathbb{R}\right\}$	b) $\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Elaborato:

a) $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\left[-\lambda(3-\lambda)-4\right] = (4-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-4) = (4-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-4)$ è il polinomio caratteristico di A

Quindi la matrice A ha 2 autovalori: $\lambda_1=-1$ con molteplicità algebrica 1 e $\lambda_2=4$ con molteplicità algebrica 2 : comunque, dato che la matrice A è simmetrica, A è diagonalizzabile (e quindi l'autospazio relativo a 4 avrà dimensione 2).

Autospazi

$\boxed{\lambda_1=-1}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ \cancel{-2} & \cancel{0} & \cancel{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2z=0 \\ 5y=0 \end{cases} \Rightarrow V_{-1}=\left\{\begin{pmatrix} 2h \\ 0 \\ h \end{pmatrix}, h\in\mathbb{R}\right\}$

$\boxed{\lambda_2=4}$ $\begin{pmatrix} \cancel{-4} & \cancel{0} & \cancel{-2} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x+z=0 \Rightarrow V_4=\left\{\begin{pmatrix} k \\ \ell \\ -2k \end{pmatrix}, \ell,k\in\mathbb{R}\right\}$

b) V_{-1} ha una base formata da un solo vettore, ad es.: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

V_4 " " " " " ~~due~~ due vettori, ad es.: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ è una base di autovettori di A: il primo è certamente ortogonale agli altri due poiché relativo ad autovalore diverso; quelli della base di V_4 sono ortogonali perché ... siamo fortunati(*)! Per trovare una base ortonormale di autovettori basta allora dividere ogni vettore della base per la sua norma:

$\left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{4+0+1} = \sqrt{5} = \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right\|$; $\left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = 1 \Rightarrow$ base ortonormale : $\left\{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

Rispetto a questa base, così ordinata, l'applicazione lineare $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(*) Ricordo che i due vettori sono ortogonali se $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left[=_{DF} 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + (-2)\cdot 0\right] = 0$

Analogamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.