Cognome_____________________________Nome________________________matr._________

*Intendo sostenere l'**orale** nel periodo* (spuntare il periodo che interessa. L'esame può essere al pomeriggio, ma non nel week-end):
☐ ***18 – 19 febbraio*** ☐ ***22 – 26 febbraio***
con l'esclusione dei seguenti giorni: ……………………………………………………………………
indirizzo e-mail:

Consegnare solo questo foglio: esso deve contenere oltre ai risultati anche lo svolgimento e le opportune giustificazioni. *Ogni quesito vale 7 punti.*

Matematica del Discreto per Informatica

16 febbraio 2016

1. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ la corrispondenza $f_k\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & k & 4 \\ -1 & 1 & k-1 \\ 0 & k+1 & 2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ definisce una applicazione lineare f_k: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

   a) Posto $k = 3$, stabilire se il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$ appartiene all'immagine di f_3.

   b) Al variare del parametro reale k determinare la dimensione di $\ker(f_k)$.

Risposte:	a) v non appartiene a $\mathrm{Im}(f_3)$	b) se $k = -1$ o 3 : $\dim(\ker(f_k)) = 1$; se $k \neq -1, 3$ $\dim(\ker f_k) = 0$

Elaborato:

a) $f_3\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y+4z \\ -x+y+2z \\ 4y+6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x+3y+4z=8 \\ 4y+6z=14 \\ 4y+6z=10 \end{cases}$ (sommando le prime due eq.)

Le ultime due equazioni sono palesemente incompatibile, quindi $\underline{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Im} f_3$

b) Si deve studiare il sistema lineare $f_k\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ al variare di k in $\mathbb{R}$.
Applicando il metodo di eliminazione di Gauss a tale sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 4 & 0 \\ -1 & 1 & k-1 & 0 \\ 0 & k+1 & 2k & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 4 & 0 \\ 0 & 1+k & k+3 & 0 \\ 0 & k+1 & 2k & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 4 & 0 \\ 0 & 1+k & k+3 & 0 \\ 0 & 0 & k-3 & 0 \end{array}\right)$$

$\boxed{\text{Se } k=3}$ l'ultima riga è una riga di zeri e quindi l'ultima equazione è un'identità mentre le altre due $\begin{cases} x+3y+4z=0 \\ 4y+6z=0 \end{cases}$ sono indipendenti e quindi il nucleo (i cui vettori hanno la forma $\begin{pmatrix} t \\ -3t \\ 2t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$) ha dimensione 1

$\boxed{\text{Se } k=-1}$ le ultime due righe sono una multiplo dell'altra e quindi il sistema è equivalente a $\begin{cases} x-y+4z=0 \\ z=0 \end{cases}$ e quindi il nucleo (i cui vettori hanno la forma $\begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$) ha dimensione 1.

$\boxed{\text{Se } k \neq -1, 3}$ i tre elementi lungo la diagonale dell'ultima matrice ottenuta con il metodo di eliminazione di Gauss sono tutti diversi da zero, cioè ci si può ricondurre alla matrice $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 4 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{k+3}{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ e quindi l'unica soluzione è il vettore nullo, cioè il nucleo ha dimensione 0.

2. Nello spazio vettoriale $V = R_3[x]$ dei polinomi in una indeterminata a coefficienti reali di grado non maggiore di 3, considerare il sottoinsieme U dei polinomi $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ tali che

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0.$$

a) Mostrare che U è un sottospazio di V.

b) Determinare una base di U e la sua dimensione.

c) Completare la base trovata a una base di V.

Risposte:	b) dim U = 3. Base: $\{1+x,\ x^2-1,\ 1+x^3\}$	c) aggiungo alla base di U il polin. 1

Elaborato:

a) il più generale polinomio che sta in U, visto che $a_0 = a_1 - a_2 + a_3$, ha la forma $a_1 - a_2 + a_3 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = a_1(1+x) + a_2(x^2-1) + a_3(1+x^3)$
Per ogni coppia di polinomi di questo tipo, $p(x)$ e $p'(x)$, e per ogni coppia di numeri reali b, b' si ha

$$bp(x) + b'p'(x) = b\left(a_1(1+x) + a_2(x^2-1) + a_3(1+x^3)\right) + b'\left(a_1'(1+x) + a_2'(x^2-1) + a_3'(1+x^3)\right) =$$
$$= (ba_1 + b'a_1')(1+x) + (ba_2 + b'a_2')(x^2-1) + (ba_3 + b'a_3')(1+x^3)$$

che è ancora un polinomio dello stesso tipo di $p(x)$ e $p'(x)$ e quindi sta in U. Questo, insieme al fatto che U è certamente non vuoto poiché $p(x) = 0$ sta in U (visto che $0-0+0-0=0$), dice che U è un sottospazio vettoriale di V.

b) Si è già visto che ogni vettore di U ha la forma

$$p(x) = a_1(1+x) + a_2(x^2-1) + a_3(1+x^3)$$

ove a_1, a_2, a_3 variano comunque in $\mathbb{R}$. Quindi i polinomi

$$1+x,\quad x^2-1,\quad 1+x^3$$

sono un sistema di generatori di U, che risultano indipendenti poiché $p(x) \equiv 0 \iff a_1 - a_2 + a_3 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$, cioè: $a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0$ (e conseguentemente $a_1 - a_2 + a_3 = 0$). Quindi sono una base di U, che di conseguenza ha dimensione 3.

c) Per avere una base di V basta aggiungere un polinomio indipendente da $\{1+x,\ x^2-1,\ 1+x^3\}$. Ad es. $p(x) = 1$ (che certamente non sta in U poiché
$1 = a(1+x) + b(x^2-1) + c(1+x^3) \iff a = b = c = 0$ e $a+b+c = 1$: IMPOSSIBILE!

3. Nel dominio di integrità dei numeri interi Z

a) stabilire se 3815 e 296 sono congrui modulo 23;

b) determinare il resto nella divisione per 5 di 9^{27}.

Risposte:	a) 3815 e 296 ....sono.......... congrui modulo 23.	b) resto = 4

Elaborato:

a) $3815 \equiv_{23} 296 \iff 3815 - 296 = 3519$ è divisibile per 23

Dividiamo
$$\begin{array}{r|l} 3519 & 23 \\ \cline{2-2} 121 & 153 \\ -69 & \end{array}$$
cioè $3519 = 23 \cdot 153 + 0$

Quindi 3519 è divisibile per 23 e quindi $3815 \equiv_{23} 296$

b) Determinare il resto nella divisione per 5 di 9^{27} significa trovare il numero intero compreso tra 0 e 4 che è congruo mod5 a 9^{27}.
Ricordo che se $a \equiv_5 a'$ e $b \equiv_5 b'$ anche $ab \equiv_5 a'b'$.
Dunque da $9 \equiv_5 4$ si ricava $9^{27} \equiv_5 4^{27}$
D'altra parte $4^{27} = 4^{2\cdot 13+1} = (4^2)^{13}\cdot 4 = (16)^{13}\cdot 4 \equiv_5 1^{13}\cdot 4 = 1\cdot 4 = 4$
Quindi $9^{27} \equiv_5 4$, cioè
$9^{27} = 5k+4$ con $k \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ resto $=4$

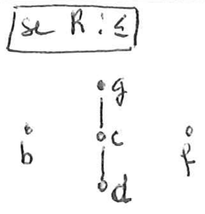
Va anche bene: $9 \equiv_5 -1 \Rightarrow 9^{27} \equiv_5 (-1)^{27} = -1 \equiv_5 4$ ecc. come nell'ultima riga

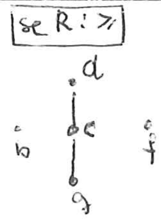
4. Considerare la relazione $\mathcal{R}$ sull'insieme di consonanti $X = \{b, c, d, f, g\}$ costituita dall'insieme di coppie ordinate $\{(b, b), (c, c), (c, g), (d, d), (d, c), (d, g), (f, f), (g, g)\}$.
   a) Costruire la matrice di incidenza di $\mathcal{R}$.
   b) Stabilire se $\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine e in caso affermativo tracciarne un diagramma di Hasse.

Risposte

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) sì;





Elaborato:

a)

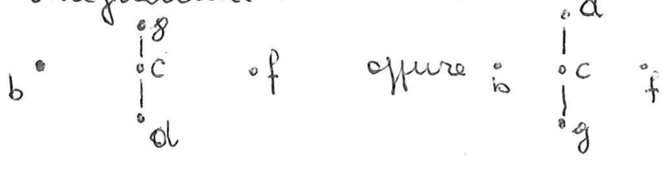
R	b	c	d	f	g
b	1	0	0	0	0
c	0	1	0	0	1
d	0	1	1	0	1
f	0	0	0	1	0
g	0	0	0	0	1

b) È evidente che la relazione su X è
- riflessiva, poiché contiene tutte e 5 le coppie $(b,b), (c,c), (d,d), (f,f), (g,g)$
- antisimmetrica, poiché per ciascuna delle 3 coppie non contenute nella relazione inversa non c'è la coppia simmetrica, cioè c'è (c,g) ma non (g,c); c'è (d,c) ma non c'è (c,d); c'è (d,g) ma non c'è (g,d).

La transitività può essere verificata prendendo in esame queste 3 sole coppie o usando le matrici di incidenza:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ cioè } A^2 = A \leq A$$

Questo basta a garantire la transitività.
Dunque R è una relazione d'ordine. Si tratta di decidere se si vuol interpretare R come $\leq$ o come $\geq$. Corrispondentemente si hanno i 2 diagrammi di Hasse:



5. In $\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ è data la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Determinare gli autovalori e gli autospazi di A.

b) Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile.

Risposte:

a) $\lambda_1 = 4$, $V_{\lambda_1} = \{ \begin{pmatrix} s \\ s+t \\ t \end{pmatrix}, s,t \in \mathbb{R} \}$, $\lambda_2 = 6$, $V_{\lambda_2} = \{ \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ r \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \}$	b) sì

Elaborato:

a) Il polinomio caratteristico è

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\left[(5-\lambda)^2 - 1\right] = (4-\lambda)(4-\lambda)(6-\lambda).$$

Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 4$ con molteplicità algebrica 2
$\lambda_2 = 6$ " " " 1

Cerco gli autospazi:

$\lambda_1 = 4$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = x+z$. Quindi $V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ s+t \\ t \end{pmatrix}, s,t \in \mathbb{R} \right\}$

è l'autospazio relativo ad $\lambda = 4$
(sono autovettori solo i vettori con s e t non contemporaneamente nulli)

$\lambda_2 = 6$: $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$. Quindi $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ r \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \right\}$

è l'autospazio corrispondente a $\lambda = 6$
(sono autovettori solo i vettori con $r \neq 0$)

b) Visto che $\dim V_4 = 2$ (i suoi generatori indipendenti sono ad es. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$)
l'autovalore $\lambda_1 = 4$ ha molteplicità geometrica 2.

Quindi $m.g.(4) = 2 = m.a.(4)$
$m.g.(6) = 1 = m.a.(6)$

e di conseguenza la matrice è diagonalizzabile (essendo la somma delle molteplicità algebriche uguale all'ordine della matrice).