(1

Istituzioni di Matematiche / Matematica per Chimica
(22/1/2015)

1. $f(x) = \ln\left(2+\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x}$

a) è definita purché $\begin{cases} 2+\frac{1}{x}>0 \\ x\neq 0 \end{cases}$ cioè in $(-\infty,-\frac{1}{2}) \cup (0,+\infty)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (\ln 2)^+$ poiché $\frac{1}{x}\to 0^-$: ASINTOTO ORIZZONTALE per $x\to-\infty$ di EQ. $\boxed{y=\ln 2}$

$\lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-} \ln\left(\frac{-1-2x}{\frac{1}{2}}\right)+4 = -\infty$ poiché $-1-2x\to 0^+$: asintoto verticale per $x\to-\frac{1}{2}^-$ di eq. $\boxed{x=-\frac{1}{2}}$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln\frac{1}{x} - \frac{2}{x} = \lim_{t\to+\infty} \ln t - 2t = -\infty$ ($2t$ ha ordine di infinito maggiore di $\ln t$)
ASINT. VERTICALE per $x\to 0^+$ di EQ $\boxed{x=0}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2$: ASINTOTO ORIZZONTALE per $x\to+\infty$ di EQ. $\boxed{y=\ln 2}$

b) $f'(x) = \frac{1}{\frac{2x+1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x^2}$. Quindi $f'(1) = -1+2 = 1$
Inoltre $f(1) = \ln 1 + 2 = 2$. Quindi l'eq della retta tangente al grafico in $(-1,1)$ è:
$y-2 = 1(x+1)$ cioè $\boxed{y=x+3}$

c) $f'(x) = \frac{-1}{x(2x+1)} + \frac{2}{x^2} = \frac{-x+4x+2}{x^2(2x+1)} = \frac{3x+2}{x^2(2x+1)} > 0 \iff \begin{cases} \frac{3x+2}{2x+1}>0 \\ x\in(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(0,+\infty) \end{cases}$

Quindi in $(0,+\infty)$: $f'(x)>0$ sempre (Num. e Den sono >0)
in $(-\frac{2}{3},-\frac{1}{2})$: $f'(x)<0$ (Num >0, Den <0)
in $(-\infty,-\frac{2}{3})$: $f'(x)>0$ (Num e Den <0)
Ne segue che $f(x)$ cresce negli intervalli $(-\infty,-\frac{2}{3})$ e $(0,+\infty)$ mentre decresce in $(-\frac{2}{3},-\frac{1}{2})$ e quindi ha un massimo relativo in $x=-\frac{2}{3}$

$f(-\frac{2}{3}) = 3-\ln 2$.

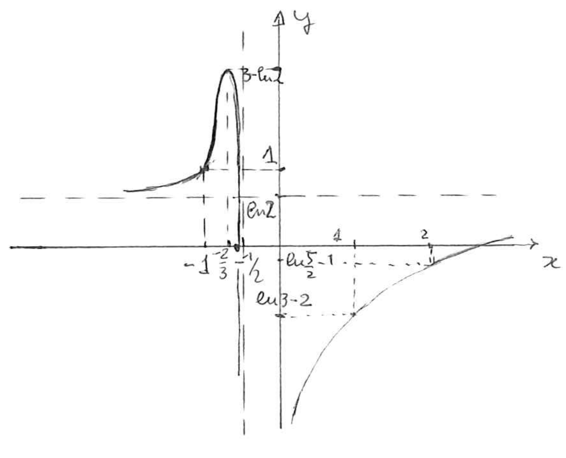
d) $f''(x) = \frac{3x^2(2x+1)-(3x+2)(2x(2x+1)+2x^2)}{x^4(2x+1)^2} = \frac{3x(2x+1)-(3x+2)(6x+2)}{x^3(2x+1)^2} = \frac{-12x^2-15x-4}{x^3(2x+1)^2}$

Poiché $12x^2+15x+4=0 \iff x_{1,2} = \frac{-15\pm\sqrt{225-192}}{24} = \frac{-15\pm\sqrt{33}}{24}$ e $x_1 = \frac{-15-\sqrt{33}}{24} < -\frac{1}{2}$ mentre $x_2 = \frac{\sqrt{33}-15}{24} > -\frac{1}{2}$ (poiché $\sqrt{33}>3$) si vede che

	x_1	$-\frac{1}{2}$	x_2	0
Dominio				
$N>0$				
$D>0$				

$f''(x)>0 \iff x<x_1$. Quindi in $x=x_1$ c'è un punto di flesso coerentemente col fatto che il $\lim_{x\to-\infty} f(x) = (\ln 2)^-$. Notare che $-1<x_1<-\frac{2}{3}$

e)



Il grafico suggerisce uno zero z_1 compreso tra $-\frac{2}{3}$ e $-\frac{1}{2}$ (poiché $f(-\frac{2}{3})>0$ mentre il limite per $x\to-\frac{1}{2}$ è $-\infty$ e quindi nell'intervallo la funzione deve diventare negativa. La continuità con il teorema degli zeri garantisce l'esistenza di almeno uno zero, la monotonia nell'intervallo dice che è unico). Similmente dovrà esistere uno zero z_2 in $(1,+\infty)$ poiché $f(1)=\ln 3-2<0$ mentre $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2>0$ e quindi la funzione è da un certo punto in poi >0 (essendo crescente); la monotonia ne garantisce l'unicità. Nell'interv. $(-\infty,-2/3)$ invece $f(x)>\ln 2 \Rightarrow$ nessuno zero.

2. La funzione integranda $\dfrac{\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{x}\right)^3}{1+x^2}$ è definita purché $x\neq 0$ e quindi è continua in $(-\infty,0)$ e in $(0,+\infty)$ che sono i possibili domini massimali delle primitive. Dato che la primitiva cercata deve essere definita in $x=1$ il suo dominio sarà $(0,+\infty)$.

Osservo che $\left(\arctan\frac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(\dfrac{-1}{x^2}\right) = \dfrac{-1}{1+x^2}$. Quindi sostituendo $t=\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{x}\right)$ e $dt = -\left(\frac{-1}{1+x^2}\right)dx$ si trova

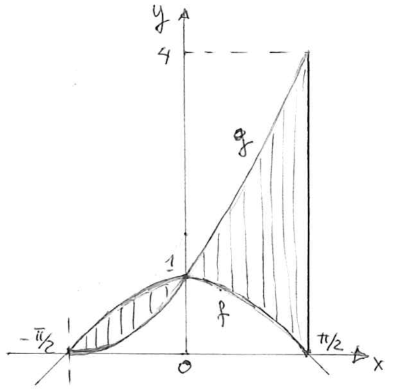
$$\int \frac{\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{x}\right)^3}{1+x^2}dx = \int t^3\,dt = \frac{t^4}{4}+c = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{x}\right)^4+c.$$

Tra queste primitive, quella che in 1 vale 2 è tale che $\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}-\arctan 1\right)^2+c = 2$, cioè essendo $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$, $c=2$.

Dunque la primitiva cercata è $\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{x}\right)^4+2$

3. La funzione $f(x)$ ha per grafico un arco di cosinusoide, simmetrico rispetto all'asse y. $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$, mentre $\cos 0=1$. Nell'intervallo la funzione è sempre non negativa;

la funzione $g(x)=\left(\frac{2}{\pi}x+1\right)^2$ ha per grafico un arco di parabola convessa con vertice in $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ e quindi sempre crescente in $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$; $g(0)=1$ e $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$.



Da notare che in $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$: $g(x)>f(x)$ poiché $g(0)=f(0)$ e nell'intervallo $g(x)$ è crescente mentre $f(x)$ è decrescente; in $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ invece $g(x)>f(x)$ poiché $g(x)$ è concava (e quindi l'arco sta sopra il segmento che congiunge $A=\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ con $B=(0,1)$) mentre f è convessa e quindi sta sotto il segmento AB.

Ne segue che la regione R è quella tratteggiata.

$\Rightarrow$ Area $= \int_{-\pi/2}^{0}(f-g)\,dx + \int_{0}^{\pi/2}(g-f)\,dx$

$$\int(f-g)\,dx = \int\left(\cos x-\left(\tfrac{2}{\pi}x+1\right)^2\right)dx = \operatorname{sen} x - \frac{\pi}{3\cdot 2}\left(\frac{2}{\pi}x+1\right)^3+c = H(x)$$

$$\text{Area} = \left[\operatorname{sen} x - \frac{\pi}{6}\left(\frac{2}{\pi}x+1\right)^3\right]_{-\pi/2}^{0} + \left[\frac{\pi}{6}\left(\frac{2}{\pi}x+1\right)^3-\operatorname{sen} x\right]_{0}^{\pi/2} = H(0)-H\left(-\frac{\pi}{2}\right)-H\left(\frac{\pi}{2}\right)+H(0) =$$

$$=\underbrace{0-\frac{\pi}{6}}\ -\underbrace{(-1+0)}\ +\underbrace{\frac{\pi}{6}\cdot 8-1}\ -\underbrace{\frac{\pi}{6}+0} = \pi$$

4. Vedi punti a) b) c) d) del compitino es. 1

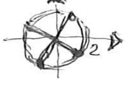
5. Vedi punto b) es. 2 del compitino. Dato che il piano tangente ha eq. $z=6x-5$ e quindi non è perpendicolare all'asse z, il gradiente nel punto $(1,1)$ non è nullo $\Rightarrow$ non è un punto critico

6. vedi pag. 3.

7. I tre vettori $u=(1,k,0)$, $v=(k,0,-1)$, $w=(1,0,1)$ sono indipendenti se e solo se $\begin{vmatrix}1 & k & 0\\ k & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}\neq 0$. Il determinante è $-k-k^2=-k(k+1)$ e quindi è non nullo se e solo se $k\neq 0,-1$. Per valori di k diversi da questi due i 3 vett. sono indip.

8. Il numero complesso $w=-8-8\sqrt{3}\,i$ ha modulo $|w|=8\sqrt{4}=16$ e argomento princ. $-\frac{2\pi}{3}$ (avendo coseno $-\frac{1}{2}$ e seno $-\frac{\sqrt{3}}{2}$). Quindi le sue radici quarte hanno la forma:

$z_k=\sqrt[4]{16}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}\right)+i\,\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}\right)\right)$ con $k=-1,0,1,2$ $\Rightarrow$ $z_0=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}-i$, $z_1=1+\sqrt{3}\,i$, $z_2=-z_0=-\sqrt{3}+i$, $z_{-1}=-z_1=-1-\sqrt{3}\,i$



6. L'equazione differenziale $y''-4y'+5y=e^{-2t}$ è lineare del 2° ordine a coeff. costanti completa, con termine noto di tipo esponenziale.

La sua omogenea associata $z''-4z'+5z=0$ ha eq. caratteristica $r^2-4r+5=0$ che, avendo $\Delta<0$, ha radici complesse coniugate $r=2\pm i$.

Quindi l'integrale generale dell'omogenea associata è

$$z(t)=(c_1\cos t+c_2 \operatorname{sen} t)e^{2t}.$$

Cerco una soluzione particolare della completa tra quelle che hanno la stessa forma del termine noto:

$$\bar{y}(t)=ke^{-2t} \qquad k\in\mathbb{R}$$

$$\bar{y}'(t)=-2ke^{2t}$$

$$\bar{y}''(t)=4ke^{-2t}$$

Sostituendo nell'eq. diff.:

$$(4k+8k+5k)\cancel{e^{2t}}=\cancel{e^{2t}}\ 1$$

trovo $17k=1$ cioè $k=\frac{1}{17}$.

Quindi una soluzione particolare è $\bar{y}(t)=\frac{1}{17}e^{-2t}$ e l'integrale generale è

$$y(t)=\frac{1}{17}e^{-2t}+e^{2t}(c_1\cos t+c_2 \operatorname{sen} t).$$